PROF : ATMANI NAJIB Tronc commun Sciences BIOF

Géométrie dans l'espace

Leçon : **Géométrie dans l'espace**

Présentation globale

I. Axiomes

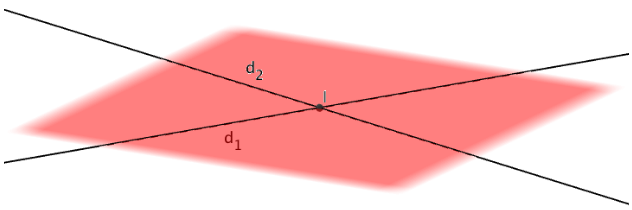
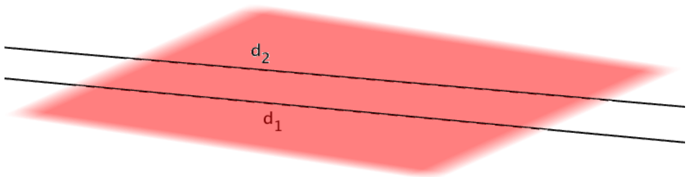
Axiomes sur lesquels reposent les raisonnements de géométrie dans l'espace

1. Par 2 points distincts de l'espace, il passe une et une seule **droite**.
2. Par 3 points non alignés de l'espace, il passe un et un seul **plan**.
3. Si un plan contient deux points A et B, alors ce plan contient tous les points de la **droite** (AB)
4. Si deux plans distincts ont un point en commun alors leur intersection est une **droite** passant par ce **point**.
5. Axiome d'Euclide : par un point A donné et une droite D donnée, il ne passe qu'**une et une seule droite parallèle à** D.

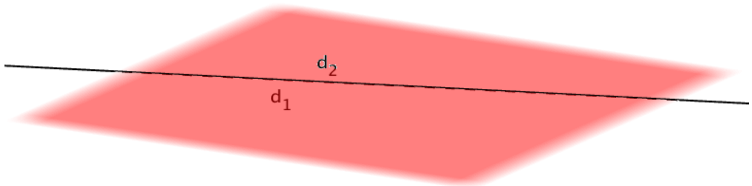
II. Positions relatives de droites et de plans

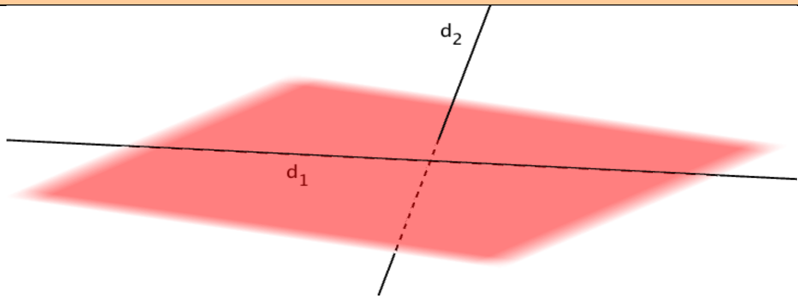
1) Positions relatives de deux droites

Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

<table>
<tr><th colspan="2">d_1 et d_2 sont coplanaires</th></tr>
<tr><td>d_1 et d_2 sont sécantes</td><td>
</td></tr>
<tr><td>d_1 et d_2 sont parallèles</td><td>

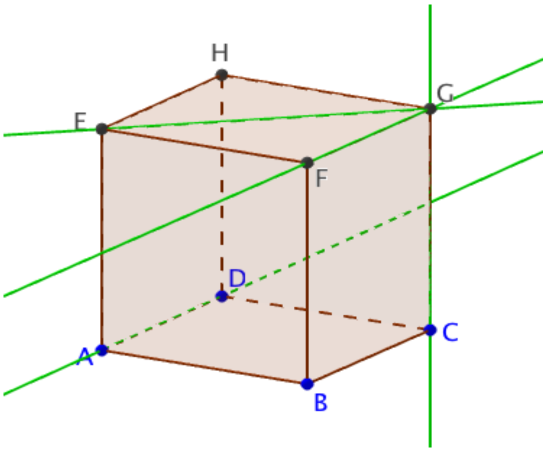
d_1 et d_2 sont strictement parallèles</td></tr>
</table>

	 d_1 et d_2 sont confondus

d_1 et d_2 sont non coplanaires


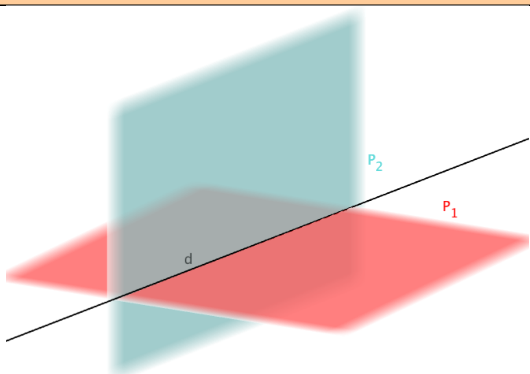
Exemple :

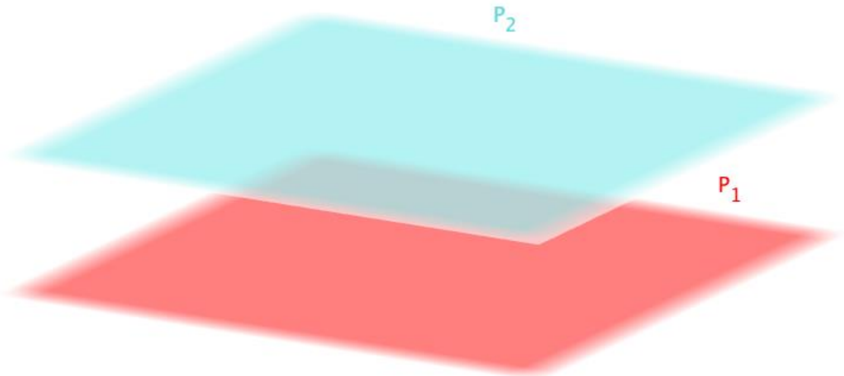
ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



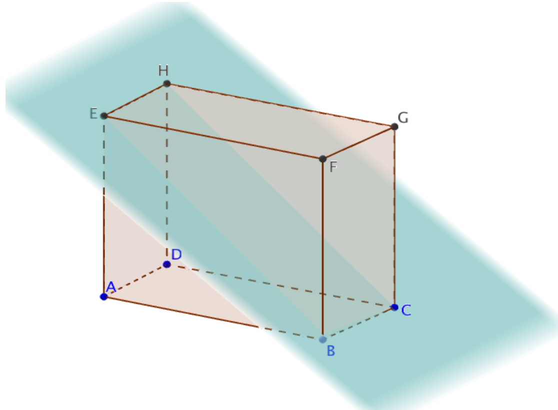
2) Positions relatives de deux plans

Propriété : Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

P_1 et P_2 sont sécants
 P_1 et P_2 sont sécants suivant la droite d

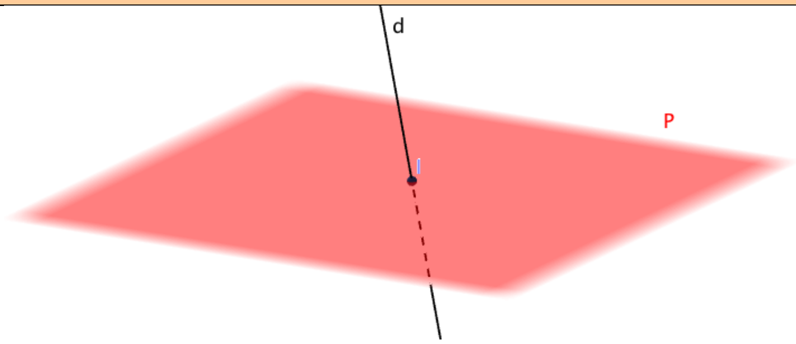
P_1 **et** P_2 **sont parallèles**
 P_1 et P_2 sont strictement parallèles
 P_1 et P_2 sont confondus

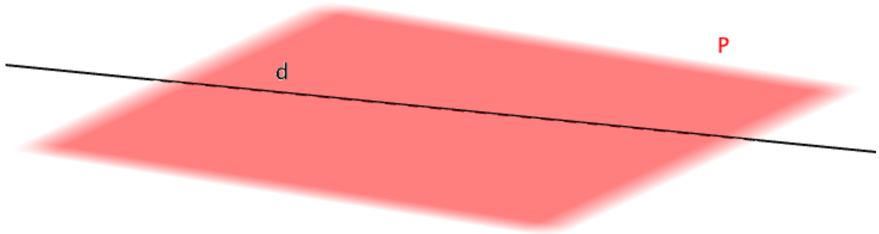
<u>Exemple :</u>
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



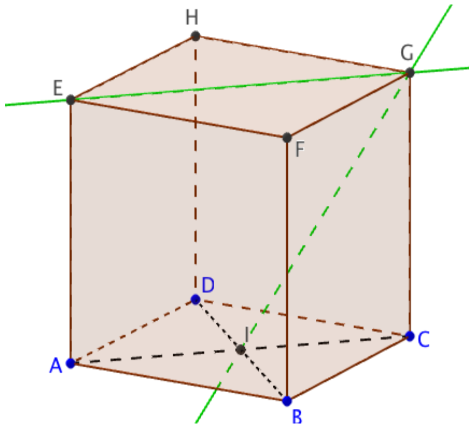
3) <u>Positions relatives d'une droite et d'un plan</u>

<u>Propriété :</u> Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

d **et** ***P*** **sont sécants**
 *d* et *P* sont sécants en un point *I*

***d* et *P* sont parallèles**
 *d* est incluse dans *P*
 *d* et *P* sont strictement parallèles

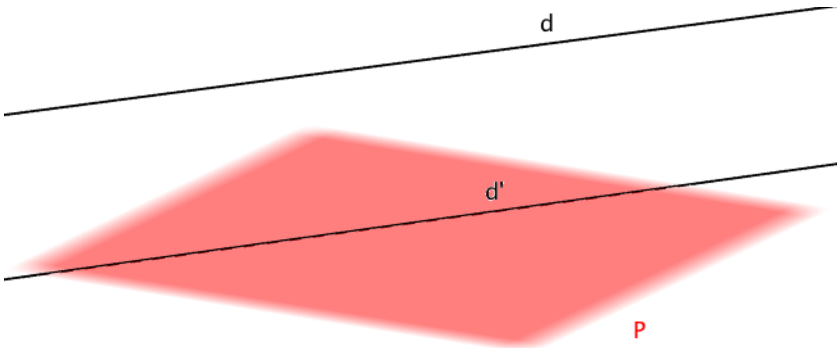
<u>Exemple :</u>
ABCDEFGH est un cube.
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.



III. Parallélisme

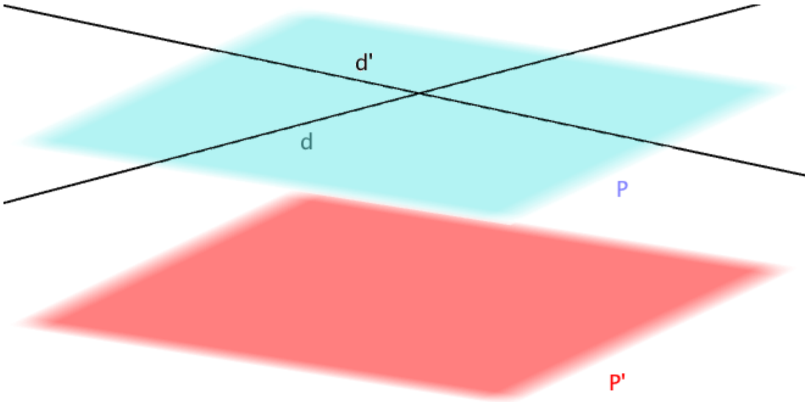
1) Parallélisme d'une droite avec un plan

<u>Propriété :</u> **Une droite *d* est parallèle à un plan *P*** s'il existe une droite *d*' de *P* parallèle à *d*.



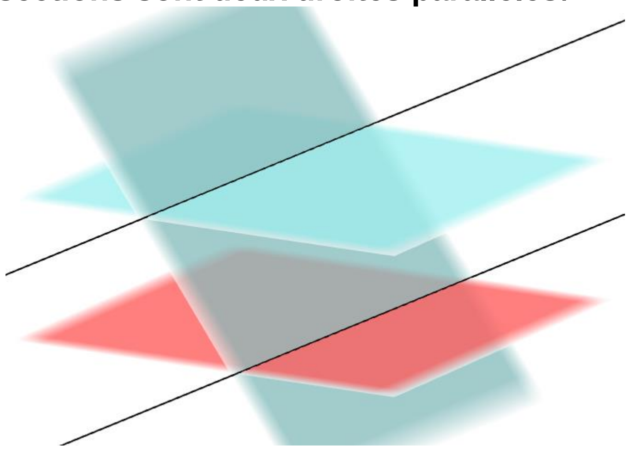
2) Parallélisme de deux plans

<u>Propriété :</u> Si un plan *P* contient deux droites sécantes *d* et *d*' parallèles à un plan *P'* alors **les plans *P* et *P*' sont parallèles**.



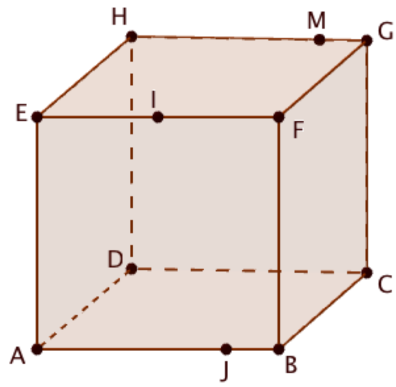
2) Parallélisme de deux droites

Propriété : Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et **leurs intersections sont deux droites parallèles**.



Méthode : Tracer l'intersection de deux plans

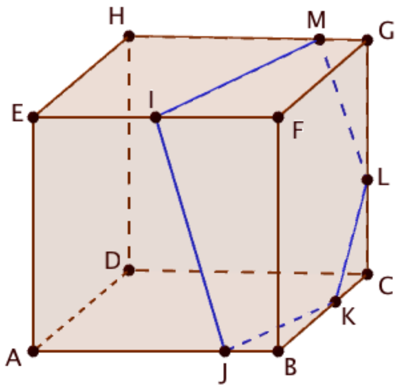
Construire l'intersection du plan (IMJ) avec le cube ABCDEFGH.



On construit la parallèle à (IJ) passant par M.
En effet, les faces ABFE et DCGH sont parallèles donc le plan (IMJ) sécant à la face ABFE coupe la face DCGH en une droite parallèle à (IJ).

De même, on trace la parallèle à (IM) passant par J.

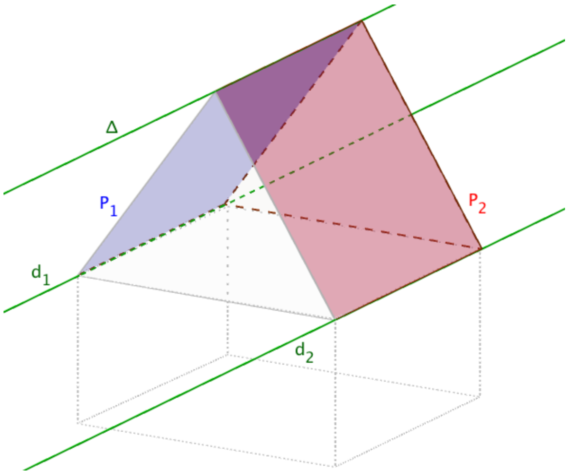
On obtient les points K et L et ainsi l'intersection cherchée.

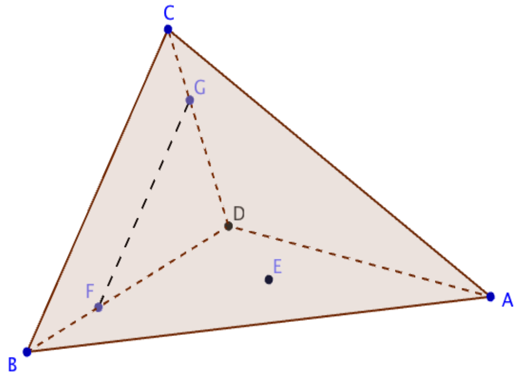


Théorème du toit : P_1 et P_2 sont deux plans sécants.
Si une droite d_1 de P_1 est parallèle à une droite d_2 de P_2 alors la droite d'intersection Δ de P_1 et P_2 est parallèle à d_1 et d_2.

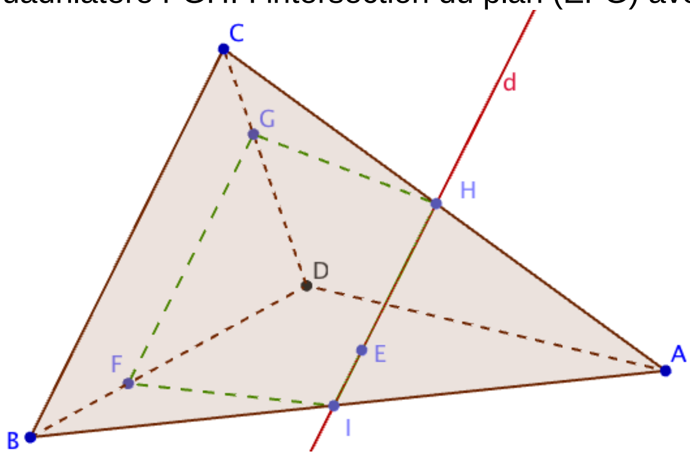
Méthode : Appliquer le théorème du toit

ABCD est une pyramide. Le segment [FG] est parallèle à l'arête [BC].





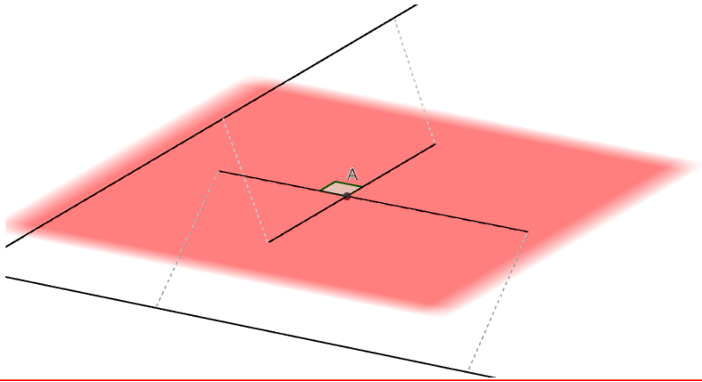
E est un point du plan (ABC).
Construire l'intersection du plan (EFG) avec la pyramide.
(BC) est une droite du plan (ABC) et (FG) est une droite du plan (EFG).
Les droites (FG) et (BC) étant parallèles, on peut appliquer le théorème du toit pour en déduire que les plans (ABC) et (EFG) se coupent suivant une droite *d* passant par E et parallèle à (FG) et (BC). Cette droite coupe [AC] en H et [AB] en I.
Il suffit enfin de tracer le quadrilatère FGHI : intersection du plan (EFG) avec la pyramide.



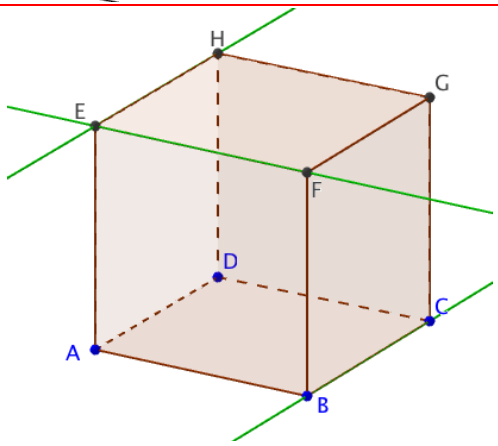
IV). Orthogonalité

1) Orthogonalité de deux droites

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



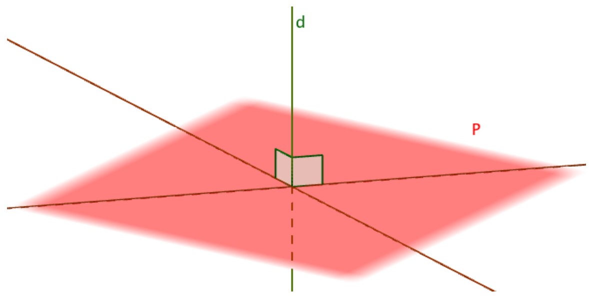
<u>Exemple :</u>
ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.



<u>Remarques :</u>
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

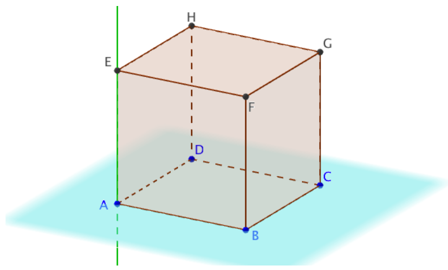
2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

<u>Propriété :</u> Une droite *d* est orthogonale à un plan *P* si elle est orthogonale à deux droites sécantes de *P*.



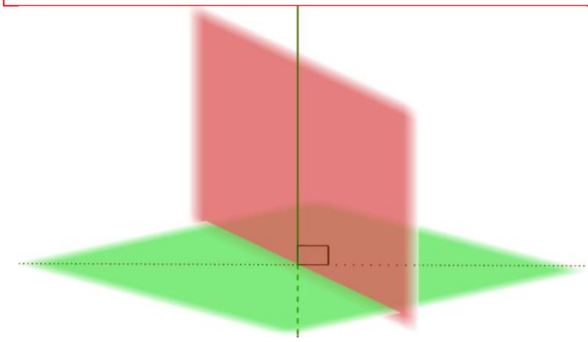
<u>Propriété :</u> Si une droite *d* est orthogonale à un plan *P* alors elle est orthogonale à toutes les droites de *P*.

<u>Exemple :</u>
ABCDEFGH est un cube.
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).



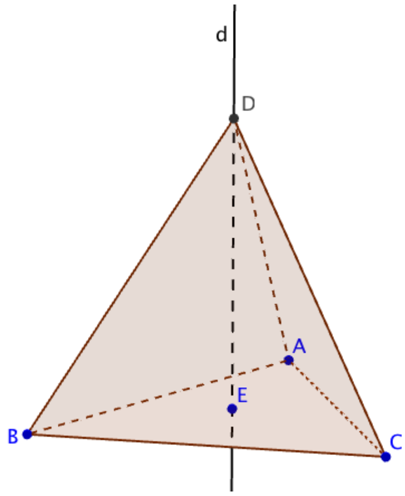
3) Orthogonalité de deux plans

Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale de l'autre.



Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes.
La droite *d* passant par E est orthogonal au plan (ABC).
La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite *d*.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.



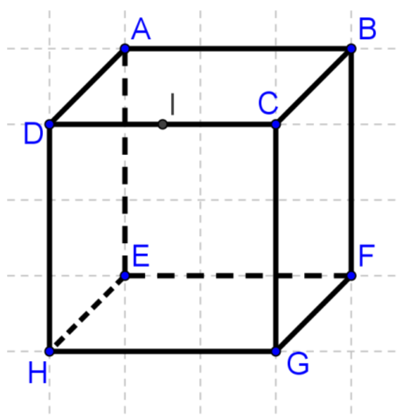
Solution :
La droite *d* est orthogonal au plan (ABC).
Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite (AC) est orthogonale à la droite *d*.
Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues.
Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et *d*.
Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).
La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BD).

Exercice 1 : (**) Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace et soit I le milieu du segment $[DC]$

1) Est ce que le point I appartient au plan (ABC) ? Justifier votre réponse

2) Montrer que les points $E\,;H\,;C\,;B$ sont coplanaires

Solution :



On a : $ABCD$ un carré donc : $(AB)\parallel(DC)$

Donc : les points $A\,;B\,;C\,;D$ sont coplanaires

Donc : $(DC)\subset(ABC)$

Et puisque : $I\in(DC)$ alors : $I\in(ABC)$

2) On a : $ABCD$ un carré donc : $(BC)\parallel(AD)$

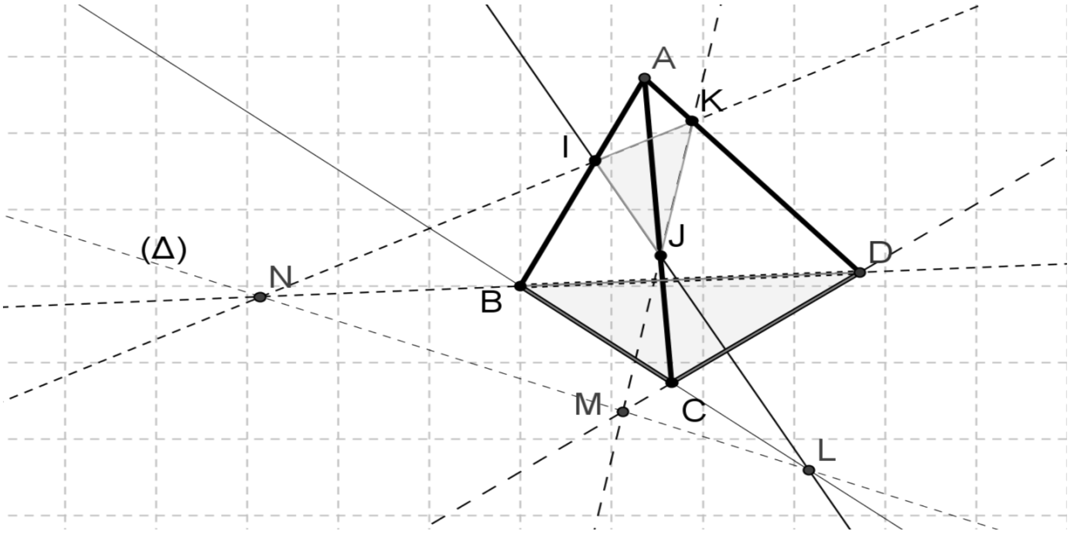
Et on a : $ADEH$ un carré donc : $(EH)\parallel(AD)$

Donc : $(EH)\parallel(BC)$ et par suite les points $E\,;H\,;C\,;B$ sont coplanaires

Exercice 2 : (**) $ABCD$ un tétraèdre et soient : I et J et K des points respective des segments $[AB]$;$[AC]$ et $[AD]$ tel que: (IJ) coupe (BC) en L et (JK) coupe (CD) en M et (IK) coupe (BD) en N

Montrer que : les points L ; M ; N sont alignés

Solution : 1)



On considère les plans : (IJK) et (BCD)

On a : $(IJK) \neq (BCD)$ et $\begin{cases} L \in (IJ) \\ (IJ) \subset (IJK) \end{cases}$ donc : $L \in (IJK)$

On a : $\begin{cases} L \in (BC) \\ (BC) \subset (BCD) \end{cases}$ donc : $L \in (BCD)$

Donc : les plans : (IJK) et (BCD) se coupent suivant une droite (Δ) qui passe par L

On a aussi : $\begin{cases} M \in (JK) \\ (JK) \subset (IJK) \end{cases}$ donc : $M \in (IJK)$

Et : $\begin{cases} M \in (CD) \\ (CD) \subset (BCD) \end{cases}$ donc : $M \in (BCD)$

ET par suite : $M \in (BCD) \cap (IJK) = (\Delta)$

On a aussi : $\begin{cases} N \in (IK) \\ (IK) \subset (IJK) \end{cases}$ donc : $N \in (IJK)$ et $\begin{cases} N \in (BD) \\ (BD) \subset (BCD) \end{cases}$ donc : $N \in (BCD)$

Par suite : $N \in (BCD) \cap (IJK) = (\Delta)$

Par suite : les points L ; M ; N appartiennent à la même droite (Δ)

Par conséquent : les points L ; M ; N sont alignés

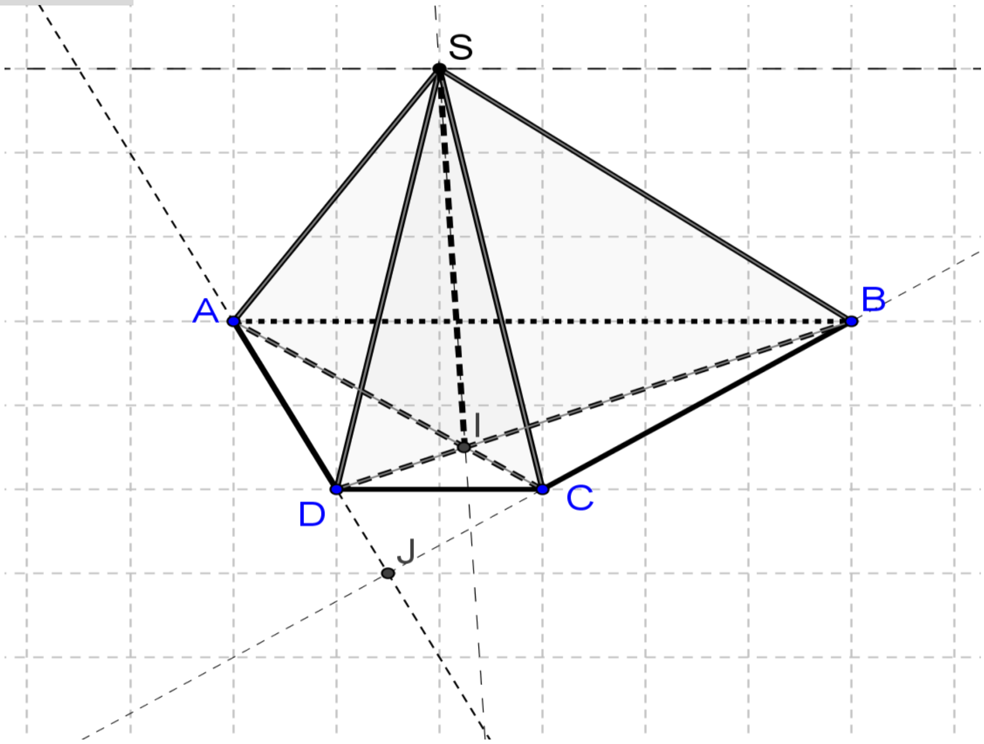
Exercice 3 : (**) $SABCD$ une pyramide sa base est un trapèze $ABCD$ tel que $(AB) \parallel (CD)$

1)Déterminer la droite (Δ) intersection des plans (SAC) et (SBD)

2) Déterminer la droite (Δ') intersection des plans (SAB) et (SCD)

3) Déterminer la droite (Δ'') intersection des plans (SAB) et (SBC)

Solution :



1) On a : $B\in(SBD)$ et $B\notin(SAC)$ donc $(SBD)\neq(SAC)$ (1)

On a : $S\in(SBD)$ et $S\in(SAC)$ donc $S\in(SBD)\cap(SAC)$ (2)

Soit I Le point d'intersection des droites (AC) et (BD)

On a : $\begin{cases} I\in(AC) \\ (AC)\subset(SAC) \end{cases}$ donc : $I\in(SAC)$

Et on a : $\begin{cases} I\in(BD) \\ (BD)\subset(SBD) \end{cases}$ donc : $I\in(SBD)$

Donc : $I\in(SAC)\cap(SBD)$ (3)

Donc : de (1) et (2) et (3) en déduit que : $(SAC)\cap(SBD)=(SI)=(\Delta)$

2) On a : $A\in(SAB)$ et $A\notin(SCD)$ Donc $(SAB)\neq(SAD)$ (1)

On a : $S\in(SAB)$ et $S\in(SCD)$ Donc $S\in(SAB)\cap(SCD)$ (2)

Donc : $(SAB)\cap(SCD)=(\Delta')$

Puisque : $(AB)\subset(SAB)$ et $(CD)\subset(SCD)$ et $(AB)\parallel(CD)$

Donc : d'après le théorème du toit : la droite (Δ') est la droite qui passe par S et parallèle a
(AB) et (CD)

3) On a : $A\in(SAD)$ et $A\notin(SBC)$ Donc $(SAD)\neq(SBC)$ (1)

On a : $S\in(SAD)$ et $S\in(SBC)$ Donc $S\in(SAD)\cap(SBC)$ (2)

Donc : $(SBC)\cap(SAD)=(\Delta'')$ qui passe par S

Soit J Le point d'intersection des droites (AD) et (BC)

Donc : $J\in(AD)$ et $J\in(BC)$

Par suite : $J\in(SBC)\cap(SAD)$ (3)

Donc : de (1) et (2) et (3) en déduit que : $(SBC)\cap(SAD)=(SJ)=(\Delta'')$

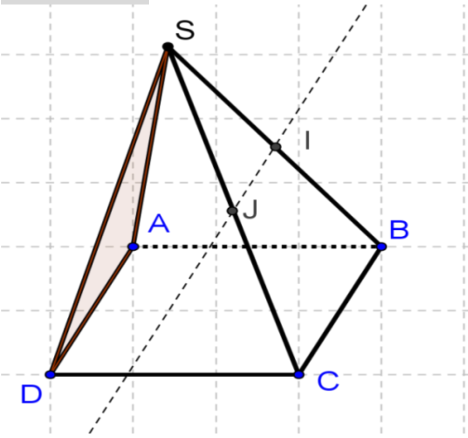
Exercice 4 : (**) $SABCD$ une pyramide sa base est un parallélogramme $ABCD$

Soient I et J les milieux respectifs des segments $[SB]$ et $[SC]$

1) Montrer que : $(AD) \parallel (IJ)$

2) Montrer que : $(IJ) \parallel (ADS)$

Solution :



1) Dans le triangle SBC on a I le milieu du segment $[SB]$ et J le milieu du segment $[SC]$

Donc $(IJ) \parallel (BC)$ (1) et puisque $ABCD$ est un parallélogramme alors $(BC) \parallel (AD)$) (2)

De (1) et (2) on déduit que $(AD) \parallel (IJ)$

2) On a : $A \in (ADS)$ et $D \in (ADS)$ donc : $(AD) \subset (ADS)$ (4) (d'après une axiome d'incidence)

Et puisque : $(AD) \parallel (IJ)$ alors : $(IJ) \parallel (ADS)$

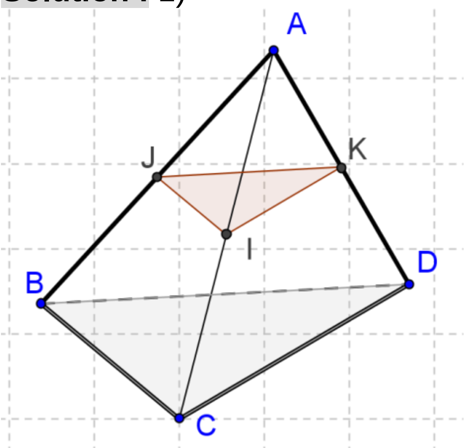
Exercice 5 : (**) $ABCD$ un tétraèdre

Soient I ; J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$; $[AB]$ et $[AD]$

1)Faire une figure

2)Montrer que : $(BCD) \parallel (IJK)$

Solution : 1)



2)dans le triangle ABC on a I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[AB]$

Donc : $(IJ) \parallel (BC)$

Et dans le triangle ABD on a : K le milieu du segment $[AD]$ et J le milieu du segment $[AB]$

Donc : $(JK) \parallel (BD)$

Et puisque : $(IJ) \parallel (BC)$ et $(BC) \subset (BCD)$ alors : $(IJ) \parallel (BCD)$

Et puisque : $(JK) \parallel (BD)$ et $(BD) \subset (BCD)$ alors : $(JK) \parallel (BCD)$

Et comme on a : $(IJ) \parallel (BCD)$ (1) et $(JK) \parallel (BCD)$ (2) et $(IJ) \cap (JK) = \{J\}$ (3)

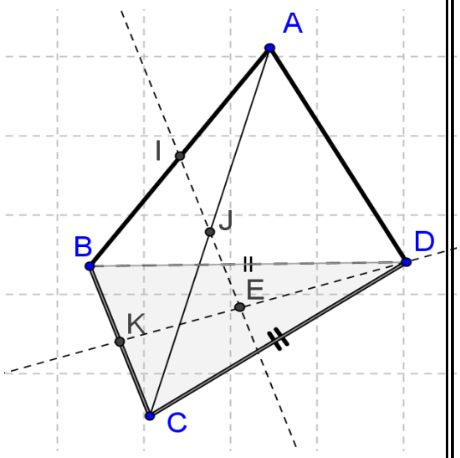
Et $(IJ) \subset (IJK)$ et $(JK) \subset (IJK)$ (4)

De (1) et (2) et (3) et (4) on déduit que: $(BCD) \parallel (IJK)$

Exercice 6 : (**) $ABCD$ un tétraèdre tel que : $BD = DC$ et Soient I ; J et K Les milieux respectifs des Segments $[AB]$; $[AC]$ et $[BC]$

1)Faire une figure

2)Montrer que : $(DK) \perp (IJ)$



Solution : 1) La figure

2) Dans le triangle ABC on a I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$

Donc : $(IJ) \parallel (BC)$ (1)

Dans le triangle BCD on a : $BD = DC$ et K le milieu du segment $[BC]$ Donc : $(DK) \perp (BC)$) (2)

Donc : de (1) et (2) on déduit que : $(DK) \perp (IJ)$