Tronc commun Sciences BIOF

http://www.xriadiat.com

I) L'ensemble des nombres entiers naturels
II) Diviseurs et multiples d'un nombre entier naturel
III) Les nombres pairs et impairs
IV) Les nombres premiers
V) Le plus grand commun diviseur
VI) Le plus petit commun multiple

Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres

I) L'ensemble $\mathbb{N}$

1) Définition : Tous les nombres entiers naturels composent un ensemble. On note : $\mathbb{N}=\{0;1;2;...\}$

$\mathbb{N}$: C'est l'ensemble des entiers naturels
0, 1, 2 et 5676 sont des entiers naturels.
Par contre -45 n'en est pas un.

Remarque : 1) On dit que ces entiers sont naturels car ce sont ceux que l'on utilise naturellement dans la vie de tous les jours.
2) Il existe une infinité d'entiers naturels.

2) Vocabulaire et symbole :
a) Le nombre 0 est le nombre entier naturel nul.
b) Les nombres entiers naturels non nuls composent un ensemble, nous le notons par le symbole : $\mathbb{N}^*=\{1;2;...\}=\mathbb{N}-\{0\}$
c) 7 est un nombre entier naturel, on écrit : $7\in\mathbb{N}$
On lit : 7 appartient a $\mathbb{N}$
d) (-3) N'est pas un nombre entier naturel, on écrit $-3\notin\mathbb{N}$ on lit : -3 n'appartient pas a $\mathbb{N}$

Exercice01 : Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$-4...\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}...\mathbb{N}$; $\sqrt{2}...\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}...\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}...\mathbb{N}$; $12-32...\mathbb{N}$; $\sqrt{25}...\mathbb{N}$; $2,12...\mathbb{N}$; $0...\mathbb{N}^*$; $-\frac{\sqrt{100}}{3}...\mathbb{N}$

$\pi...\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}...\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}...\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*...\mathbb{N}$; $\{0\}...\mathbb{N}$; $10...\{1;8;9;11;12\}$; $5.....\varnothing$

Correction : $-4.\notin\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$; $\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}\in\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}\notin\mathbb{N}$; $12-32\notin\mathbb{N}$; $\sqrt{25}\in\mathbb{N}$; $2,12\notin\mathbb{N}$; $0\notin\mathbb{N}^*$;
$\frac{\sqrt{100}}{2}\in\mathbb{N}$; $\pi\notin\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}\subset\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}\not\subset\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$; $\{0\}\subset\mathbb{N}$; $10\notin\{1;8;9;11;12\}$; $5\notin\varnothing$

II) Diviseurs et multiples d'un nombre entier naturel

1)Définition : Soient : $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}^*$
On dit que : a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de : a s'il existe un entier naturel k tel que : $a=k\times b$; On dit aussi que b est un **diviseur** de a.

Remarque : Tout nombre entier naturel non nul *a* admet au moins deux diviseurs, 1 et *a*.
Le nombre 0 est un multiple de tous les nombres entiers naturels.
- Le nombre 1 est un diviseur de tous les nombres entiers naturels.

Exemple : On a : $145=5\times29$ alors : 5 et 29 sont des diviseurs de 145
12 = 4 × 3 = 1 × 12 = 6 × 2
4, 3, 1, 12, 6 et 2 sont des diviseurs de 12
Par contre 5 n'est pas un diviseur de 12 car :$12\div5\notin\mathbb{N}$

Exercice02 : 1) Déterminer les multiples de 9 comprises entre : 23 et 59
2) Déterminer les diviseurs de 56
3) Existe-t-il un nombre multiple de 12 et diviseur de 80

Correction : 1) Les multiples de 9 s'écrivent sous la forme : $9k$ avec : $k\in\mathbb{N}$
On a donc : $23\le9k\le59$ Signifie que : $23/9\le k\le59/9$

Signifie que : $2.5 \leq k \leq 6.5$ donc : $k \in \{3;4;5;6\}$

Par suite : les multiples de 9 comprises entrent : 23 et 59 sont : 9×3 ; 9×4; 9×5; 9×6
C'est à dire : 27 ; 36 :45 ; 54

2) Déterminons les diviseurs de 56 : $56 = 8\times7 = 2^3\times7^1$
Il y a : (3 +1) ×(1 +1) = 4 ×2 = 8diviseurs
Les diviseurs de 56 sont : 1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56
3)s'il Existait un nombre n multiple de 12 c'est-à-dire s'il existait un nombre n tel que 12 divise n et n divise 80
Par transitivité 12 divise 80 ce qui est impossible
Résultat : il n'existe aucun un nombre multiple de 12 et diviseur de 80

2)Critères de divisibilité

Soit n un nombre entier naturel, n est divisible par :
a) 2 si et seulement si son nombre d'unités est : 0, 2, 4, 6 ou 8.
b) 3 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3.
c) 4 si et seulement si le nombre formé par ces deux derniers chiffres est divisible par 4.
d) 5 si et seulement si son nombre d'unités est : 0 ou 5.
e) 9 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 9.

Exemples :

- Le nombre 4725 est divisible par 5 car se termine par 5.
- Le nombre 4725 est divisible par 3 et 9 car le nombre 18= (4+7+2+5) est un multiple de 3 et de 9.
- Le nombre 1628 est divisible par 2 car son chiffre d'unités est 2.
- Le nombre 1628 est un multiple de 4 car le nombre 28 formé par ces deux derniers chiffres est un multiple de 4.

Exercice03 : Déterminer le chiffre x pour que le nombre : $95x2x31x$ soit divisible par 3 et un nombre impair (Déterminer tous les nombres possibles).

Correction : On a $0 \leq x \leq 9$ le nombre : $95x2x31x$ est impair donc : $x \in \{1;3;5;7;9\}$

Le nombre : $95x2x31x$ est divisible par 3 ssi : $9+5+x+2+x+3+1+x=3k$ cad un multiple de 3
Donc : $20+3x=3k$
Donc : en donnant à x les valeurs $\{1;3;5;7;9\}$ on trouve que $x=5$ donc le nombre est : 95525315

Exercice04 : On pose : $x = 3\times5\times7\times12$ et $y = 2\times5\times3\times5$
Sans calculer x et y monter que :1)75 divise y 2)105 divise x

Correction : 1) On a $y = 2\times5\times3\times5$ cad $y = 2\times75$
Donc : 75 divise y
2) On a $x = 3\times5\times7\times12$ c'est-à-dire : $x = 105\times12$
Donc : 105 divise x

III) Les nombres pairs et impairs

Activité : Ecris les nombres suivants : sous la forme $2\times\ldots$ ou $2\times\ldots+1$:
68 ;69; 86 ; 87 ; 92; 93

Solutions :68 = 2 x 34 ; 69 = (2 x 34) + 1 ; 86 = 2 x 43 ; 87 = (2 x 43) + 1 ; 92 = 2 x 46 ;93 = (2 x 46) + 1

Règle 1 : Les nombres pairs sont terminés par 0, 2, 4, 6, 8
Les nombres impairs sont terminés par 1, 3, 5, 7, 9

Définition1 : On dit qu'un nombre pair s'il est un multiple de 2 ou s'il existe un entier naturel k tel que : $a=2\times k$

Exemple : 6 = 2 x 3 k =3 donc 6 est nombre pair

Définition2 : On dit qu'un nombre impair s'il existe un entier naturel k tel que : $a=2\times k+1$

Exemple : 11 = 2 x 5+1 k =5 donc 11 est nombre impair

Exercice05 : $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$
Montrer que si a est pair et b impair alors la somme est un nombre impair.

Correction : a est pair alors : $a=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

b Impair alors : $b=2k'+1$ avec $k'\in\mathbb{N}$

$a+b=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$

Donc : $a+b$ est un nombre impair

Exercice06 : $a\in\mathbb{N}$

Montrer que si a est impair alors a^2 est un nombre impair

Correction : a est impair alors : $a=2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

$a^2=(2k+1)=(2k)^2+2\times2k\times1+1^2=4k^2+4k+1$

Donc : $a^2=2(k^2+2k)+1=2k''+1$ avec $k^2+2k=k''$

Donc : a^2 est un nombre impair

Exercice07 : $a\in\mathbb{N}$

Montrer que si a^2 est impair alors a est un nombre impair

Correction : On suppose que a est pair alors a^2 est un nombre pair or a^2 est impair donc : contradiction

Donc : a est un nombre impair

Remarques : Un nombre entier naturel est soit paire soit impaire, et on a les résultats suivants :

Nombres	a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$
Parité des nombres	pair	pair	pair	pair	pair
	impair	impair	pair	pair	impair
	pair	impair	impair	impair	pair

Exercice08 : 1) Montrer que le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair

2) Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

a) 2023^2+2022^2 b) $2n^2+7$ c) $2022n+4m+2021$ d) $n^2+2021n+2023$ e) n^2+8n

Correction : Un nombre pair s'écrit sous la forme 2k, avec k entier.

Un nombre impair s'écrit sous la forme 2k+1, avec k entier.

1) Soit $n\in\mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)

$n\times(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs. Exemple : 2×3 ou 3×4 ou 100×101 …

On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair.

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas en effet :

1ére cas : Si n est pair alors il existe un entier

Naturel k tel que : $n=2k$ par suite : $n\times(n+1)=2k\times(2k+1)=2[k\times(2k+1)]=2k'$ avec

$k'=k\times(2k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair.

2ére cas : Si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k+1$

Par suite : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+2)=2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1)=2k'$ avec $k'=(2k+1)\times(k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

Par conséquent : $n\times(n+1)$ est un nombre pair pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) a) 2023^2+2022^2 : 2022^2 est paire car le carré d'un nombre pair.

2023^2 est impair car le carré d'un nombre impair.

2023^2+2022^2 C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.

b) $2n^2+7=2n^2+6+1=2(n^2+3)+1=2\times k+1$ avec $k=n^2+3\in\mathbb{N}$

Et par suite : $2n^2+7$ est un nombre impair.
c) $2022n+4m+2021=2022n+4m+2020+1=2(1011n+2m+1010)=2k+1$
Avec : $k=1011n+2m+1010\in\mathbb{N}$.
Donc : $2022n+4m+2021$ est un nombre impair.
d)On a : $n^2+2021n+2023=n^2+n+2020n+2022+1=n(n+1)+2(1010n+1011)+1$
Et on a : $n(n+1)$est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.
Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$
Donc : $n^2+2021n+2023=2k+2(1010n+1011)+1$
Donc : $n^2+2021n+2023=2(k+1010n+1011)+1=2k'+1$ avec $k'=k+1010n+1011$
Par suite : $n^2+2021n+2023$ est un nombre impair.
e) Etude de la parité de $n^2+2024n$:
1ére cas : <u>si n pair.</u>
$n^2=n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair
On a : $n^2+2024n$ c'est la somme de deux nombres pairs donc : $n^2+2024n$ est pair.
2ére cas : <u>si n impair.</u>
$n^2=n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair
On a : $n^2+2024n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : $n^2+2024n$ est impair.
Exercice09 : Soient : $n\in\mathbb{N}^*$ tel que : $n-1$ soit un multiple de 3.
Montrer que : n^2-1est un entier naturel multiple de 3.
Correction : On a : $n-1$ soit un multiple de 3
Donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que : $n-1=3k$ c'est-à-dire : $n=3k+1$
Donc : $n^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=9k^2+6k$ $n^2-1=3(3k^2+2k)=3k'$ avec : $k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$
Par suite : n^2-1est un entier naturel multiple de 3
IV). NOMBRES PREMIERS
<u>Définition</u> Un nombre entier naturel est dit **premier** s'il admet <u>exactement</u> deux diviseurs :
1 et lui-même
<u>Exemples</u> : 7 est un nombre premier car les seuls diviseurs de 7 sont 7 et 1.
4 n'est pas premier car il est divisible par 2.
Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 sont :2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ;
37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.
<u>Remarques:</u> 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1
2 est le seul nombre premier pair
Il y a une infinité de nombre premier
Exercice10 : Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse.
0 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ; 2787 ; 191 ;1004001 et 259
Correction : Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont : 1 et lui-même.
1) 0 n'est pas premier car tous les nombres divise 0
17 est premier car admet exactement deux diviseurs
21 n'est pas premier car 3 divise 21 ($21=7\times3$)
41 est premier car admet exactement deux diviseurs
87 n'est pas premier car 3 divise 87 ($87=29\times3$)
105 n'est pas premier car 5 divise 105 ($105=5\times21$)
Question : Est-ce que 239 est premier ?
On utilise la règle suivante : « Pour montrer qu'un nombre est premier il suffit de vérifier qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier p inferieur à sa racine carré »
Donc on cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\le239$
Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 239 et par conséquent : 239 est premier
2787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 24 qui est multiple de 3 donc 3 divise 2787

3) Est ce que 191 est premier ? On utilise la règle :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 191$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 191. Par conséquent : 191 est premier
1004001 n'est pas premier car la somme des chiffres est 6 qui est un multiple de 3 donc 3 divise 1004001
259 n'est pas premier car $259 = 7 \times 37$ c'est à dire 7 divise 259.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Par exemple, 15 n'est pas premier : 15 = 5 × 3.
Les nombres 5 et 3 sont premiers. Ainsi le nombre 15 est égal à un produit de nombres premiers.
Théorème : Tout entier naturel non premier se décompose en produit de facteurs premiers
Exemples : $28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$
$50 = 2 \times 5^2$; $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
Remarque : On peut démontrer que cette décomposition est unique.
Exercice11 : 1) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 60
2) Déterminer le nombre de diviseurs de 60.
3) Déterminer les diviseurs de 60
Solution : 1) La décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel 60 est : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
2) Il y a : (2 +1) ×(1 +1) = 3 × 2 × 2 = 12 diviseurs
3) Les diviseurs de 60 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 2 ; 6 ; 10 ; 4 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60
Donc : $D_{60} = \{1;2;3;4;5;6;10;12;15;20;30;60\}$

V) Le plus grand commun diviseur :

Définition Soient a et b deux entiers non nuls
Le PGCD de a et b est le plus grand diviseur commun des nombres a et b.
On le note : $PGCD(a;b)$ ou $a \wedge b$

Exemple : Les diviseurs du nombre 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Les diviseurs du nombre 15 sont : 1, 3, 5, 15.

Alors $PGCD(12;15) = 3$ ou $12 \wedge 15 = 3$

• METHODES POUR TROUVER LE PGCD

Propriété : Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de : a et b.

VI) . Le plus petit commun multiple

Définition : Soient a et b deux entiers non nuls.
PPCM de a et b est le plus petit multiple commun des nombres a et b. On le note PPCM (a ; b).
Exemple : *Les multiples du nombre 12 sont : 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, … .*
Les multiples du nombre 8 sont : 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48. . Alors PPCM (12 ;8) = 24.

METHODES POUR TROUVER LE PPCM

Propriété : Le plus petit multiple commun de deux nombres est le produit des facteurs communs munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de : a et b.
Exercice12 : 1) Décomposer les deux nombres 612 et 1530 en produit de facteurs premiers.
2) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 612 et 1530
3) a) Déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{612}{1530}$ b) Déduire la somme suivante : $\frac{7}{612} + \frac{3}{1530}$
4) Simplifier la racine carrée suivant : $\sqrt{612 \times 1530}$ et l'écrire sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers
Correction :
• On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
• On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.
1) $612 = 2^2 \times 3^2 \times 17$ et $1530 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 17$

2)a) On applique la règle suivante pour calculer le PGCD (612 ;1520) :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »

Donc : $PGCD(1530;612)=2^1\times3^2\times17=306$

b) Pour calculer le PPMC des nombres 612 et 1530 on a deux méthodes :

Methode1 : Ecrire le produit de tous les facteurs premiers présents dans l'une ou dans l'autre de ces deux décompositions et élever ces facteurs à leur plus grande puissance

Donc : $PPCM(612;1530)=2^2\times3^2\times5^1\times17^1=3060$

Methode2 : On a : $PGCD(612;1530)\times PPCM(612;1530)=612\times1530$

Donc : $PPCM(612;1530)=\dfrac{612\times1530}{PGCD(612;1530)}=3060$

2)a) Méthode 1 : $\dfrac{612}{1530}=\dfrac{2^2\times3^2\times17}{2^1\times3^2\times5^1\times17}=\dfrac{2}{5}$ Méthode 2 : $\dfrac{612}{1530}=\dfrac{612\div306}{1530\div306}=\dfrac{2}{5}$

<u>Remarque :</u> le $PGCD(2;5)=1$

b) Calcul de : $\dfrac{7}{612}+\dfrac{3}{1530}$ Il faut mettre les fractions au même dénominateur :

Le $PPCM(612;1530)=3060$ est par définition le plus petit multiple commun de ces nombres :

$3060\div612=5$ et $3060\div1530=2$

$\dfrac{7}{612}+\dfrac{3}{1530}=\dfrac{7\times5}{612\times5}+\dfrac{3\times2}{1530\times2}=\dfrac{35}{3060}+\dfrac{6}{3060}$ Donc : $\dfrac{7}{612}+\dfrac{3}{1530}=\dfrac{35+6}{3060}=\dfrac{41}{3060}$

<u>Remarque :</u> le $PGCD(41;3060)=1$ en effet : on peut utiliser Algorithme d'Euclide qui est une autre méthode pour déterminer le PGDC :

3060 = 74 ×41 + 26

41 = 1 ×26 + 15

26 = 1 ×15 + 11

15 = 1 ×11 + 4

11 = 2 ×4 + 3

4 = 1 ×3 + 1

3 = 3 ×1 + 0

Le PGDC est le dernier reste non nul : donc $PGCD(41;3060)=1$

4) $\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2^1\times3^2\times5\times2^2\times3^2\times17^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{17^2}$

$\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2}\times3\times\sqrt{5}\times2\times3\times17=306\times\sqrt{10}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien