Cours Calcul vectoriel dans le plan avec Exercices avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB

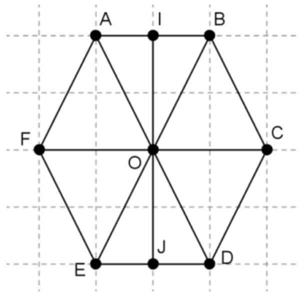
Tronc commun Sciences BIOF

http:// www.xriadiat.com

Calcul vectoriel dans le plan

I) Vecteurs du plan :

Activité : On considère un hexagone régulier ABCDEF de centre O, et I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [ED]. En utilisant les lettres de la figure citer :



1) Deux vecteurs égaux
2) Deux vecteurs de même direction, de sens contraire et de normes différentes
3) Deux vecteurs de même direction, de même sens et de normes différentes
4) Deux vecteurs de direction différentes et de même norme
5) Deux vecteurs opposés

Corrigé :1) Des vecteurs égaux sont par exemple : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}$

2) Deux vecteurs de même direction, de sens contraire et de normes différentes sont :
Par exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$.

3) Deux vecteurs de mêmes directions, de même sens et de normes différentes sont par exemple :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC}$

4) Deux vecteurs de direction différentes de même norme sont par exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

5) Deux vecteurs opposés sont par exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$

Propriété : Soient A et B deux points du plan (P)

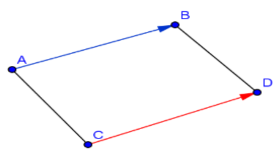
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par trois données :

- Une *direction* : celle d'une droite (AB)
- Un *sens* de parcours (dans la direction de la droite);
- Une *norme* (ou *longueur*) et on note : $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

II) L'égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme

Remarque :



- Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}=...$, On note ce vecteur $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants du même vecteur $\vec{u}$.
- $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Si et seulement si $A=B$.

• $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ (*L'opposé* du vecteur)

• Pour tout point A du plan $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ (le vecteur nul)

Propriété1 : Soient A ; B; C ; D des points du plan (P) tel que $A\neq B$ et $C\neq D$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme

Propriété2 : Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

Propriété3 : Etant donné un point A et un vecteur $\bar{u}$; il existe un point M unique tel que $\overline{AM}=\bar{u}$.

III) Somme de deux vecteurs

1) Relation de Chasles : Soit A, B, C trois points du plan. On a la relation suivante : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles)

Remarque : Cette relation de Chasles s'utilise de trois manières différentes :

- Tout d'abord, c'est cette relation qui définit la somme de deux vecteurs.
- Cette relation permet de réduire des sommes vectorielles
- Cette relation permet dans les démonstrations d'intercaler des points dans des écritures vectorielles

Exercice01 : On considère les vecteurs :$\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ Et $\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$

Simplifier les vecteurs : $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Corrigé : $\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

D'après la relation de Chasles :

$\vec{U}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$

$\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}$

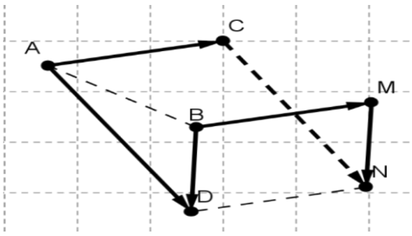
$\vec{V}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}$

Exercice02 : Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P).

1) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{MN}$

Corrigé : 1)



2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

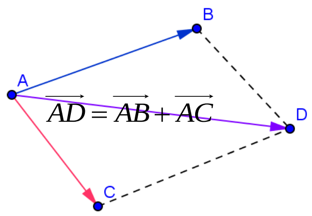
$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

2) Règle du parallélogramme : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A un point du plan

Il existe un point B unique tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et il existe un point C unique tel que $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ tel que ABDC est un parallélogramme



Exercice03 : Soit ABC est un triangle et M un point du plan et on considère D et E du plan tel que :

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$

Quelle est la nature des quadrilatères ABCD et ACBE ? Justifier votre réponse

Corrigé : 1) $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ signifie : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ Signifie que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

Donc : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

2) $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$ signifie : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$

Signifie : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ signifie : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$ Signifie : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$

Donc : le quadrilatère ACBE est un parallélogramme

Remarque : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan

La différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la somme de $\vec{u}$ et $\left(-\vec{v}\right)$ On écrit : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$

Exercice04 : Soit ABCD est un parallélogramme ; On pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Corrigé : ABCD est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{j}-\vec{i}$

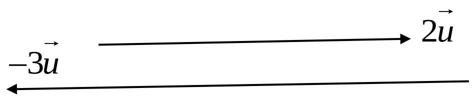
Donc : $\overrightarrow{AD}=\vec{j}-\vec{i}$

On a : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}$

Donc : $\overrightarrow{BD}=\vec{j}-2\vec{i}$

IV) La multiplication d'un vecteur par un réel

1) Définition : $\vec{u}$ un vecteur non nul et un nombre non nul k, on appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $k\bullet\vec{u}$ ayant les caractéristiques suivantes : $k\bullet\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, même sens si $k\succ 0$ et de sens contraire si $k\prec 0$



2) Remarques : $k\bullet\vec{0}=\vec{0}$ et $1\bullet\vec{u}=\vec{u}$, $(-1)\bullet\vec{u}=-\vec{u}$ et Si $k\bullet\vec{u}=\vec{0}$ alors k=0 ou $\vec{u}=\vec{0}$

Exercice05 : A, B, C trois points du plan non alignés

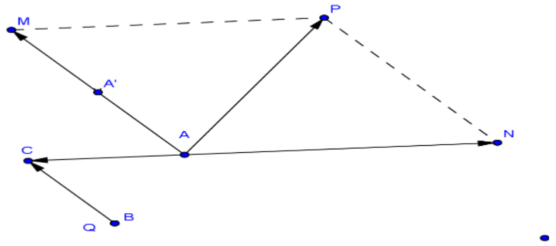
On considère : M, N, P et Q des points du plan tel que : $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}$

1) Faire une figure

2) En déduire que : $2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}$ et $B=Q$

Corrigé : 1) La figure



2) On a : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}=2\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=2\overrightarrow{BA}$

Donc : $2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}$

Et on a : $\overrightarrow{AQ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}\Leftrightarrow-\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AQ}$

Donc : $2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AQ}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}$ Par suite : $B=Q$

3) Propriétés : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres a et b dans $\mathbb{R}$:

1) $a\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=a\vec{u}+a\vec{v}$ 2) $\left(a+b\right)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$ 3) $a\left(b\vec{u}\right)=\left(a\times b\right)\vec{u}$ 4) $1\vec{u}=\vec{u}$

5) $a\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=a\vec{u}-a\vec{v}$ 6) $\left(a-b\right)\vec{u}=a\vec{u}-b\vec{u}$

Exercice06 : Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; Simplifier les écritures des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$ $\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

Corrigé : $\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)=2\vec{u}+2\vec{v}-4\times\frac{1}{2}\vec{u}+4\vec{v}$

$\overrightarrow{W_1}=2\vec{u}+2\vec{v}-2\vec{u}+4\vec{v}=6\vec{v}+\vec{0}=6\vec{v}$

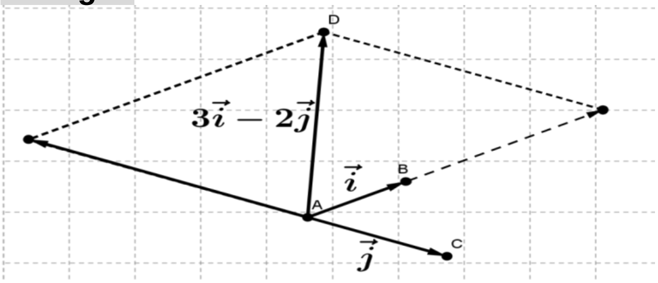
$\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

$\overrightarrow{W_2}=\vec{u}-3\vec{v}+\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{u}=2\vec{u}+\vec{0}-2\vec{u}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

Exercice07 : Soit ABC est un triangle et on pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

Construire le vecteur $3\vec{i}-2\vec{j}$.

Corrigé :



V)La colinéarité de deux vecteurs

1) Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe une constante $k\in\mathbb{R}$ telle que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Remarque : Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

2) Propriété : 1) Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

2) Soit (AB) une droite. Alors $M\in(D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

3) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice08 : Soit ABC est un triangle. E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

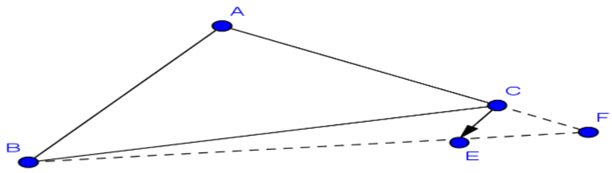
1) Faire une figure

2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

4) En déduire que : Les points E, F et B sont alignés

Corrigé : 1) La figure :



2) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$

3) Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ Donc : $\boxed{\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}}$

4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?

$\overrightarrow{BF}=-\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ Donc $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires

D'où : Les points E, F et B sont alignés

Exercice 09 : Soit ABC est un triangle. I et J sont deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) Déduisez que : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

Corrigé : 1) a) Expression de $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? D'après la relation de Chasles :

On a : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}$ d'où : $\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (1)

b) Expression de $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}$ D'où : $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ (2)

2) Pour démontrer que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

Or : $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{IC}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires

Donc : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

VI) Milieu d'un segment

Propriété1 : Soient A, B et I trois points du plan.Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1) I est le milieu du segment [AB]. 2) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ 3) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 4) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Propriété2 : Caractérisation du milieu :

Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment [AB] si et seulement si pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Démonstration : Supposant que I est le milieu du segment [AB]

Donc : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}=2\overrightarrow{MI}$

Supposant que pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

On prend : M=I donc : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{II}=\vec{0}$

D'où I est le milieu du segment [AB]

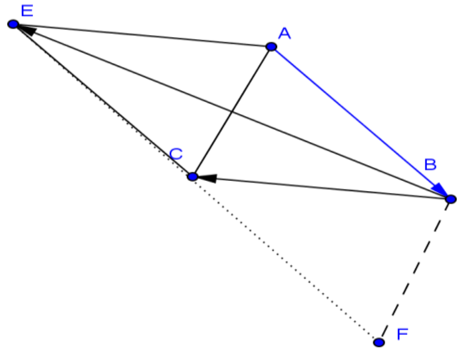
Exercice 10 : Soit ABC est un triangle.

Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

1)Faire une figure

2) Montrer que : C est le milieu du segment [EF]

Corrigé : 1) La figure :



2) On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire : 1 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}$

Et on a : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire : 2 $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Donc : C est le milieu du segment [EF]

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien