Cours avec Exercices Avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB

Tronc commun Sciences BIOF

http:// www.xriadiat.com

Leçon : droite dans le plan

Présentation globale

I) Repère et coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur

1)Activité : Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Et soit M un point quelconque du plan

1) Construire le point M_1 la projection de M sur (OI) parallèlement a (OJ) et le point M_2 la projection de M sur (OJ) parallèlement a (OI)

2) Soit x l'abscisse de M_1 sur l'axe gradué (OI) et y l'abscisse de M_2 sur l'axe (OJ)

a) Ecrire $\overrightarrow{OM_1}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et écrire $\overrightarrow{OM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$

b) En déduire $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$

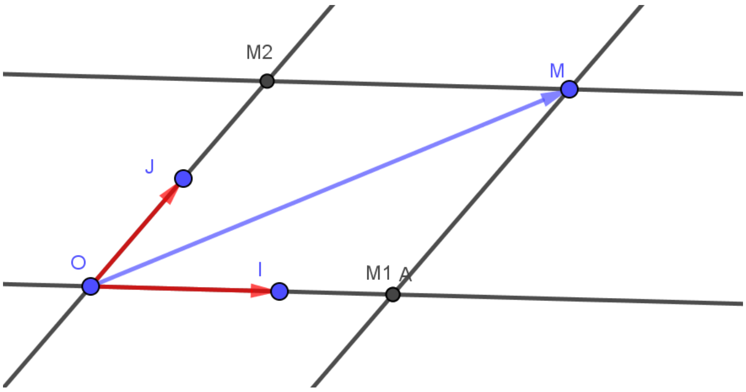
Réponse : 1) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$

2) a) On a : x l'abscisse de M_1 sur l'axe gradué (OI)

Donc $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OI}$

Et on a : y l'abscisse de M_2 sur l'axe (OJ)

Donc $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OJ}$



b) Dans le quadrilatère OM_1MM_2 :

$(OM_1) \parallel (MM_2)$ et $(OM_2) \parallel (MM_1)$

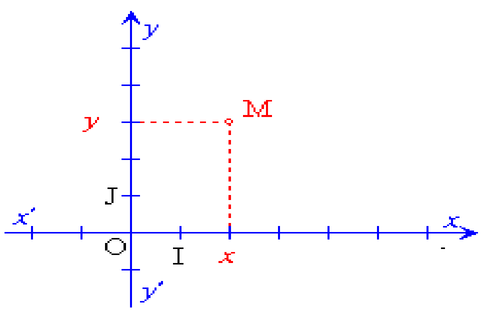
Donc OM_1MM_2 est un parallélogramme

Et par suite : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$

Alors : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

2) Le Repère dans le plan :

Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Le triplet (O ; I ; J) détermine un Repère dans le plan.
On le note R (O ; I ; J) ou R
Le point O est l'origine du Repère (O ; I ; J)
La droite (O I) est l'axe des abscisses du Repère (O ; I ; J)
La droite (O J) est l'axe des ordonnées du Repère (O ; I ; J)



- Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires ont dit que le Repère est orthogonal
- Si on a : OI =OJ = 1 ont dit que le Repère (O ; I ; J) est normé
- Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires

et si on a OI =OJ = 1 ont dit que le Repère (O ; I ; J) est orthonormé : On pose : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

on note alors le Repère (O ; I ; J) par $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Les coordonnées d'un point :

Propriété et définition : Le plan est rapporté au Repère (O ; I ; J).Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x,y) tel que $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$

Le couple (x,y) est le couple de coordonnée de M

Et on note : $M(x,y)$: x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M

4) Les coordonnées d'un vecteur :

Définition : Le plan est rapporté au Repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

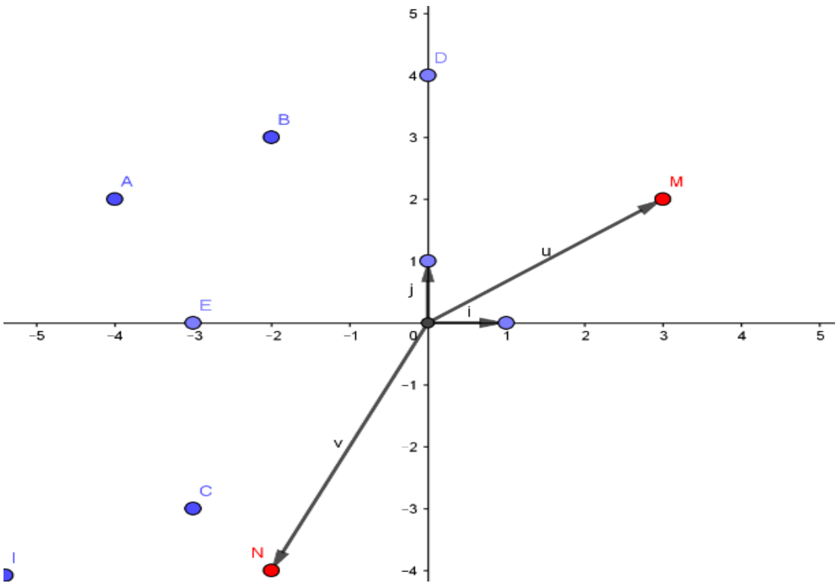
Le couple de coordonnée d'un vecteur $\vec{u}$ est le couple de coordonnée du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et on note : $\vec{u}(x,y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Construire les points $A(-4;2)$; $B(-2;3)$ $C(-3;3)$; $E(0;4)$; $F(-3;0)$ et les vecteurs : $\vec{u}(3;2)$; $\vec{v}(-2;-4)$

Réponse :

Soit M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ donc $M(3;2)$

Et soit N tel que $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ donc $N(-2;-4)$



Propriétés : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $I(x_I;y_I)$

Trois points dans le plan et $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs.

On a : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$ et $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$\vec{u}(x;y)=\vec{v}(x';y')$ si et seulement si : $x'=x$ et $y=y'$

et on a : $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$ et $\vec{u}-\vec{v}(x-x';y-y')$ et $\vec{u}+\vec{v}=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}$

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $\alpha\cdot\vec{u}(\alpha x;\alpha y)$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soient $A(1;2)$; $B(-5;4)$

1) Déterminer les coordonnées de I le milieu du segment [AB] et calculer $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

2) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

3) Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$

4) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$

Réponse :1) Le milieu I du segment [AB] : a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$

Donc : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc : $I\left(\frac{1+(-5)}{2};\frac{2+4}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I(-2;3)$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

2) On a $A(1;2)$; $B(-5;4)$; $O(0;0)$

Donc $\overrightarrow{OA}(x_A-x_O;y_A-y_O)$ par suite : $\overrightarrow{OA}(1-0;2-0)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OA}(1;2)$

$\overrightarrow{OB}(x_B-x_O;y_B-y_O)$ Donc $\overrightarrow{OB}(-5-0;4-0)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OB}(-5;4)$

On a $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OC}(1+(-5);2+4)$

Donc $\overrightarrow{OC}(-4;6)$ c'est-à-dire : $C(-4;6)$

3) On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

On vérifie : On a $\overrightarrow{OA}(1;2)$ ① et $\overrightarrow{BC}(-4+5;6-4)$ c a d $\overrightarrow{BC}(1;2)$ ②

De ① et ② on a donc $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$

Donc $OACB$ est un parallélogramme

4) on a $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{OA}(1;2)$; $2\overrightarrow{OB}(-10;8)$; $\overrightarrow{IC}(-4+2;6-3)$ Donc $\overrightarrow{IC}(-2;3)$

On a $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$ donc $\vec{u}(1-10+2;1+8+3)$ Par suite : $\vec{u}(-11;13)$

II) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

Dans la suite de ce cours le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=\alpha\bullet\vec{v}$

On a $\vec{u}(x;y)$ et $\alpha\bullet\vec{v}(\alpha x';\alpha y')$

On a $\vec{u}=\alpha\bullet\vec{v}$ donc $x=\alpha x'$ et $y=\alpha y'$

Si $x'\neq 0$ et $y'\neq 0$ alors $\alpha=\frac{x}{x'}$ et $\alpha=\frac{y}{y'}$

Donc $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$ alors $xy'=x'y$

Finalement on a : $xy'-x'y=0$

Si $x'=0$ alors $x=0$ la condition est juste

Si $y'=0$ alors $y=0$ la condition est juste

1) Le déterminant de deux vecteurs :

Définition : Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs

On appelle le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ le réel : $xy'-x'y$

Et on le note : $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$

Exemple : $\vec{u}(-2;3)$ et $\vec{v}(4;5)$ et $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=(-2)\times 5-3\times 4=-10-12=-22$

Propriété : Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si : $\det(\vec{u};\vec{v})=0$

Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont non colinéaires si et seulement si : $\det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$

Remarque : Trois points A. B et C sont alignés si et seulement si : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si : $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$

Application : On considère les vecteurs : $\vec{u}(3,-2)$ et $\vec{v}(-6,4)$

Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Solution : Methode1 : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=3\times4-(-6)\times(-2)=12-12=0$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Methode2 : $\vec{u}(3,-2)$ donc : $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$

On a : $\vec{v}(-6,4)$ donc : $\vec{v}=-6\vec{i}+4\vec{j}$

On remarque que : $\vec{v}=-6\vec{i}+4\vec{j}=-2\left(3\vec{i}-2\vec{j}\right)=-2\vec{u}$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exercice1 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chaque cas :

1) $\vec{u}(3;2m+1)$ et $\vec{v}(2;m)$

2) $\vec{u}(m;1)$ et $\vec{v}(1;m)$

Réponse : 1) On a : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2m+1 & m \end{vmatrix}=3\times m-2(2m+1)=3m-4m-2=-m-2$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ si et seulement si : $-m-2=0$ si et seulement si : $m=-2$

Si $m=-2$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m\neq-2$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)\neq0$ Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

2) On a : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1=m^2-1^2=(m+1)(m-1)$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ si et seulement si : $(m+1)(m-1)=0$

si et seulement si : $m=-1$ ou $m=-1$

Si $m=1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m=-1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m\neq1$ et $m\neq-1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Exercice2 : Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

On donne les points suivants : A(0; 2), B(5; 7), C(−3; 7), D(9; 3)

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

2) Trouver les équations réduites des droites (AB) et (CD)

3) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection

Solution :

1) Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si le déterminant de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ n'est pas nul.

On a : $\overrightarrow{AB}(5-0;7-2)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}(5;5)$

Et On a : $\overrightarrow{DC}(-3-9;7-3)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{DC}(-12;4)$

Et on a : $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}\right)=\begin{vmatrix}5 & -12\\ 5 & 4\end{vmatrix}=5\times4-(-12)\times5=20+60=80\neq0$

Donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont non colinéaires par suite les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

2) a) l'équation réduite de la droite (AB) s'écrit sous la forme : $y=mx+p$

$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-0}{7-2}=\frac{5}{5}=1$ Donc : (AB) : $y=1x+p$

Et puisque : $A\in(AB)$ alors : $2=1\times0+p$ c'est-à-dire : $p=2$

Donc : l'équation réduite de la droite (AB) est : $y=x+2$

b) l'équation réduite de la droite (CD) s'écrit sous la forme : $y=mx+p$

$m=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{3-7}{9+3}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$ Donc : (CD) : $y=-\frac{1}{3}x+p$

Et puisque : $C\in(CD)$ alors : $7=-\frac{1}{3}\times(-3)+p$ c'est-à-dire : $p=6$

Donc : l'équation réduite de la droite (CD) est : $y=-\frac{1}{3}x+6$

3) Calculons les coordonnées du point d'intersection des droites : (AB) et (CD)

Soit $I(x;y)$ le point d'intersection de (AB) et (CD), on a les relations :

$\begin{cases} y_I=x_I+2\\ y_I=-\frac{1}{3}x_I+6\end{cases}$ On a alors $-\frac{1}{3}x_I+6=x_I+2$ (en multipliant par 3) :

Donc : $-x_I+18=3x_I+6$

Donc : $12=4x_I$

Donc : $x_I=3$ et comme : $y_I=x_I+2$

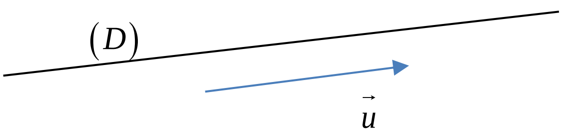
Alors : $x_I=3$ et $y_I=5$ d'où : $I(3;5)$

III)La droite dans le plan

1) Définition vectorielle d'une droite :

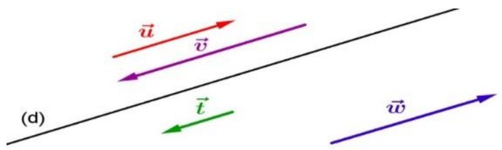
a. Vecteur directeur d'une droite :

Un vecteur directeur d'une droite (D) est un vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (D)

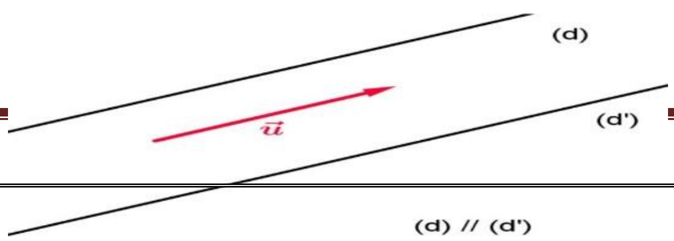


Remarques :

- Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.
- si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) alors tout vecteur non nul et colinéaire au vecteur $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de cette droite.



- Deux points distincts quelconques de la droite (D) définissent un vecteur directeur de cette droite



• Deux droites (D), et (D') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.

b. **Propriété :** Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan .L'ensemble des points M du plan tel que : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ est la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A qu'on note : $D\left(A;\vec{u}\right)$: $D\left(A;\vec{u}\right) = \left\{M \in P / \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}\right\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

C'est la Définition vectorielle d'une droite

2) Représentation paramétrique d'une droite :

Soit $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan

On a $M \in D\left(A;\vec{u}\right)$ si et seulement si : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$

On a $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ et $\alpha\vec{u}(\alpha a; \alpha b)$ donc $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$

Donc : $\begin{cases} x - x_A = \alpha a \\ y - y_A = \alpha b \end{cases}$ si et seulement si : $\begin{cases} x = \alpha a + x_A \\ y = \alpha b + y_A \end{cases}$ Avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Définition : Soit $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan et $t \in \mathbb{R}$

Le système : $\begin{cases} x = ta + x_A \\ y = tb + y_A \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ s'appelle une représentation paramétrique de la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$

Exemple 1 : Donner un point et un vecteur directeur de la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 7t - 1 \\ y = -4t + 11 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

<u>**Réponse :**</u> On a $A(-1;11) \in D$ et $\vec{u}(7;-4)$ est un vecteur directeur de la droite D

Exemple 2 : Soient A (1 ; 2) et B(-3 ; 0)

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Déterminer si chacun des points suivants appartient ou non à la droite (AB) :

$C(0;2)$; $D(-1;1)$; $E(9;6)$

<u>**Réponse :**</u>**1)** $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), ses composantes sont : $\overrightarrow{AB}$ (-4, -2)

La représentation paramétrique de (AB) est donnée par le système :① $\begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = -2t + 2 \end{cases}$ Avec $t \in \mathbb{R}$

2) On a $C(0;2)$ on remplace les coordonnées de C dans le système ①

Donc $\begin{cases} 0 = -4t + 1 \\ 2 = -2t + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = 0 \end{cases}$ or $\frac{1}{4} \neq 0$ donc $C \notin (AB)$

On a $D(-1;1)$ on remplace les coordonnées de D dans le système ①

Donc $\begin{cases} -1 = -4t + 1 \\ 1 = -2t + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc : $D \in (AB)$

On a $E(9;6)$ on remplace les coordonnées de E dans le système ①

Donc $\begin{cases} 9 = -4t + 1 \\ 6 = -2t + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ Donc $E \in (AB)$

3) Equations cartésiennes d'une droite

Soit $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan et soit $(D)=D\left(A;\vec{u}\right)$

On a $M(x;y)\in(D)$ si et seulement si : $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

Si et seulement si : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$ On a $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$

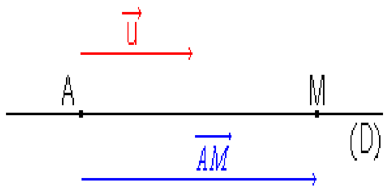
Et on a : $\begin{vmatrix} x-x_A & \alpha \\ y-y_A & \beta \end{vmatrix}=\beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=\beta x-\beta x_A-\alpha y+\alpha y_A=\beta x-\alpha y-\beta x_A+\alpha y_A$

On pose : $\beta=a$ et $-\alpha=b$ et $-\beta x_A+\alpha y_A=c$

Alors : $M(x;y)\in(D)$ si et seulement si : $ax+by+c=0$

<u>Définition :</u> Toute droite (D) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$
avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$ ou $b\neq 0$

<u>Remarque :</u> Une droite (D) admet une infinité d'équations cartésiennes
En effet, si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de (D), alors pour tout réel ***k*** non nul alors $kax+kby+kc=0$ est une autre équation de la même droite.



<u>Propriété</u> : Soient : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ Tels que $a\neq 0$ ou $b\neq 0$
L'ensemble des points M (x ; y) vérifiant l'équation : $ax+by+c=0$
Est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$

<u>Exemple 1</u> écrire une équation cartésienne de la droite (D) passant par A(1,3) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;2)$ et donner les coordonnées d'un point B de cette droite et vérifier si C(–2,9) appartient-il à cette droite ?

Réponse :1) <u>methode1 :</u> Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(D)$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-1;y-3)$ et $\vec{u}(-1;2)$ sont colinéaires si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y-3 & 2 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $2(x-1)-(-1)(y-3)=0$

Équivaut à : $2x-2+y-3=0$ c'est à dire : (D) : $2x+y-5=0$.
Une équation cartésienne de la droite (D) est : $2x+y-5=0$

<u>Methode2 :</u> Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : (D) $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(-1;2)$

Donc : $a=2$ et $b=1$ alors l'équation devient : (D) $2x+1y+c=0$ Or on sait que A(1,3) et $A\in(D)$

Donc : $2\times1+1\times3+c=0$ c'est à dire : $c=-5$ Par suite : (D) : $2x+y-5=0$
2) Affectons une valeur à x et déterminons la valeur correspondant à y.
Par exemple, prenons x = 0. Comme B appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation de (D) À savoir : $2x_B+y_B-5=0$ Ainsi $2\times0+y_B-5=0$ soit $y_B=5$ donc : $B(0;5)$ est un point de (D).
Le point C(–2,9) appartient-il à cette droite ?
Dire que : $C\in(D)$ revient à dire que les coordonnées de C vérifient l'équation de (D).

Or $2x_C+y_C-5=0=2(-2)+9-5=-4+9-5=0$

Donc, oui : C est sur (D).

<u>Exemple 2 :</u> Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par les points :
A (2 ; 4) et B (5 ; -1)

Solution : <u>Methode1 :</u> Soit M un point de coordonnées : M (x ; y)

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-2;y-4)$ et $\overrightarrow{AB}(3;-5)$ sont colinéaires si, et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-4 & -5 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-5(x-2)-3(y-4)=0$

Équivaut à : $-5x+10-3y+12=0$

Une équation cartésienne de la droite (D) est : $-5x-3y+22=0$

Methode2 : (D) : $ax+by+c=0$: $\overrightarrow{AB}(3,-5)$ Un vecteur directeur de (D) et on a : $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

Donc : $a=-5$ et $b=-3$

Donc l'équation devient : (D) $-5x-3y+c=0$

Or on sait que : $A\in(AB)$ donc : $-5\times2-3\times4+c=0$ c'est-à-dire : $c=22$

Par suite : (D) $-5x-3y+22=0$.

4) Equation réduite d'une droite :

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ donc $by=-ax-c$

Si $b\neq0$ alors $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

On pose : $m=-\frac{a}{b}$ et $p=-\frac{c}{b}$ alors $y=mx+p$

Si $b=0$ alors on a $ax+c=0$ donc $x=-\frac{c}{a}$ $(a\neq0)$ dans ce cas (D) est parallèle à l'axe des ordonnées

Définition : Soit (D) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

L'équation : **y = mx + p** *s'appelle* L'équation réduite de (D)

- Le nombre *m s'appelle* le coefficient directeur de la droite
- Le nombre *p s'appelle* l'ordonnée à l'origine

Remarque :

- Si m *est le* coefficient directeur de la droite alors un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1;m)$
- Si $\vec{u}(-b;a)$ *est* un vecteur directeur de la droite (D) et $b\neq0$ alors $m=-\frac{a}{b}$ est un coefficient directeur de la droite

Exemple : Soit (D) la droite d'équation cartésienne : *4x + 2 y + 3 = 0*

- Son équation réduite est de la forme : y = -2x-3
- *-2 est* le coefficient directeur de la droite (D)
- Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(-2;4)$ ou $\vec{u}(1;-2)$

Remarque : si $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$ et $x_A\neq x_B$

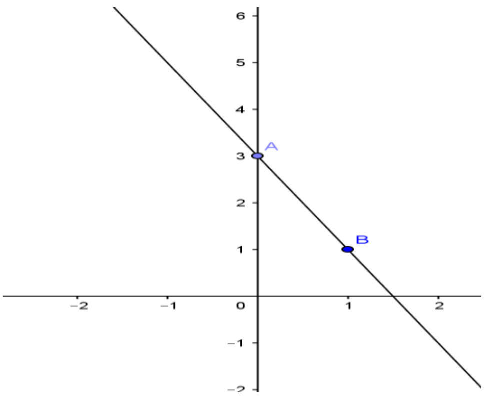
Alors : $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ est le coefficient directeur de la droite (AB)

Exemple : Représenter graphiquement les droites suivantes :

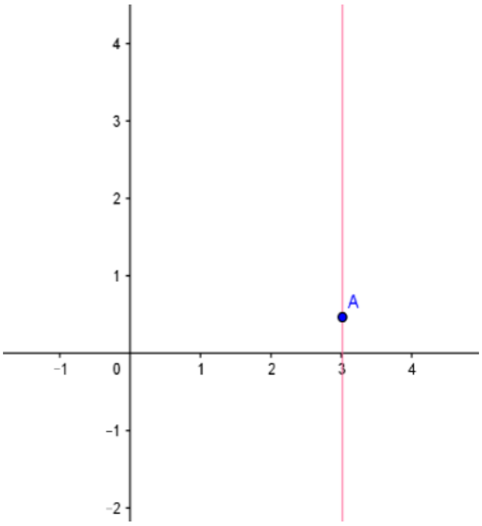
1) (D_1) *2x + y - 3 = 0*   2) (D_2) : *x = 3*   3) (D_2) : *y = 2*

Réponse :1)

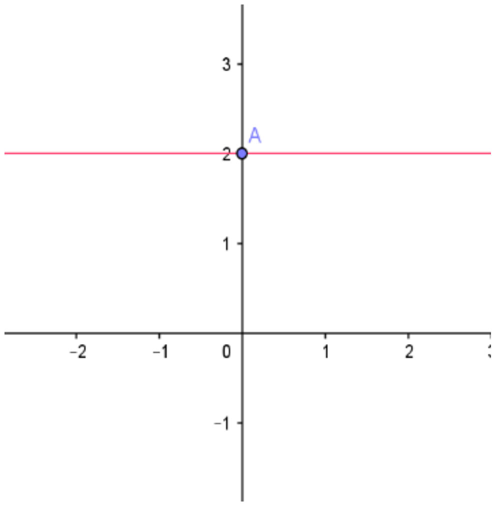
x	0	1
y	3	1



2)



3)



IV) Positions relatives de deux droites dans le plan

Propriété : Deux droites (D) et (D'), d'équations respectives : *ax + by + c* = 0 et *a'x + b 'y + c '* = 0
Sont parallèles si et seulement si : *a b ' - a'b* = 0

Démonstration : $\vec{u}(-b;a)$ Est un vecteur directeur de la la droite(D)

$\vec{u}'(-b';a')$ est un vecteur directeur de la droite(D'),

(D) et (D') sont parallèles équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires ce qui équivaut à :
- b a' - a (- b') = 0 ce qui équivaut à : *a b' - a'b* = 0.

Remarque : 1)Si (D) et (D') sont parallèles : on prend un point $A \in (D)$

• Si $A \in (D')$ alors $(D) = (D')$ (confondues)

• Si $A \notin (D')$ alors $(D) \parallel (D')$ strictement

2) Si (D) et (D') sont sécantes alors le point d'intersection E (x ; y) vérifie le système :

$$\begin{cases} ax+by+c = 0 \\ a'x+b'y+c' = 0 \end{cases}$$

Exemple : Étudier la position relative des deux droites D) et (D') dans chaque cas suivant :

1) (D) **:** $2x-4y+3=0$ ***et*** (D') **:** $-x+2y+5=0$

2) (D) : $2x+5y-2=0$ ***et*** (D') **:** $x+3y-2=0$

3) (D) : $10x+35y-15=0$ ***et*** (D') **:** $14x+49y-21=0$

Solution :1) On a : (D) 2*x – 4 y + 3 = 0* donc $\vec{u}(4;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** -x +2 y + 5 = 0 donc $\vec{v}(-2;-1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4+4=0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (D) et (D') sont parallèles

Soit $A(x;y) \in (D)$ on prend $x=0$

Alors **:** 0 – *4 y + 3 = 0* donc $y=\frac{3}{4}$ c'est-à-dire : $A\left(0;\frac{3}{4}\right) \in (D)$

On vérifie si : $A\left(0;\frac{3}{4}\right) \in (D')$?

On a : $-0+2\times\frac{3}{4}+5=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}\neq 0$ donc $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\notin(D')$ D'où : $(D)\parallel(D')$ strictement parallèles

2) on a : (D) 2x + 5 y -2 = 0 donc $\vec{u}(-5;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** x +3 y -2 = 0 donc $\vec{v}(-3;1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}-5 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5+6=1\neq 0$

Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc (D) et (D') sont sécantes.
On détermine le point d'intersection de (D) et (D').

Soit $E(x;y)$ ce point d'intersection de (D) et (D') Alors **:** $(x;y)$ vérifie le système : $\begin{cases}2x+5y-2=0\\ x+3y-2=0\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}2x+5y=2\\ x+3y=2\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}2x+5y=2\\ x=2-3y\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}2(2-3y)+5y=2\\ x=2-3y\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}4-6y+5y=2\\ x=2-3y\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}4-y=2\\ x=2-3y\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}y=2\\ x=2-3y\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}y=2\\ x=-4\end{cases}$ alors : $E(-4;2)$.

3) (D) : $10x+35y-15=0$ ***et*** (D') **:** $14x+49y-21=0$

On a : (D) **:** $10x+35y-15=0$ donc $\vec{u}(-35;10)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** $14x+49y-21=0$ donc $\vec{v}(-49;14)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}-35 & -49\\ 10 & 14\end{vmatrix}=-490+490=0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (D) et (D') sont parallèles.

Soit $A(x;y)\in(D)$ on prend $y=0$

Alors **:** $10\times x+35\times 0-15=0$ signifie que : $10\times x-15=0$ donc $y=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$ c'est-à-dire : $A\left(\frac{3}{2};0\right)\in(D)$

On vérifie si : $A\left(\frac{3}{2};0\right)\in(D')$?

On a : $14\times\frac{3}{2}+49\times 0-21=21-21=0$ donc $A\left(\frac{3}{2};0\right)\in(D')$ D'où : (D) et (D') sont confondues

Exercice3 : Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points suivants : $A(-2;1)$; $B(3;-2)$; $C(4;-1)$ et $E(-3;0)$

1) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ)

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

c) Montrer que : $B\in(\Delta)$

d) Déterminer les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des ordonnées.

e) Déterminer les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des abscisses.

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante: $(D)\begin{cases}x=6t-3\\ y=2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D)

b) Montrer que les droites (D) et (Δ) sont sécantes, puis déterminer leurs points d'intersection.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') parallèles a (D) passant par $C(4;-1)$

Solution :1) a) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

a) On cherche une équation cartésienne de la droite (Δ)

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(\Delta)$

$M(x;y)\in(\Delta)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+2;y-1)$ et $\vec{u}(5;-3)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-1 & -3 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-3(x+2)-5(y-1)=0$

Équivaut à : $-3x-6-5y+5=0$ Équivaut à : $-3x-5y-1=0$

Équivaut à : $-(3x+5y+1)=0$

Équivaut à : $3x+5y+1=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $(\Delta):3x+5y+1=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite (Δ) s'écrit sous la forme : (Δ) $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(5;-3)$

Donc : $a=-3$ et $b=-5$ alors l'équation devient : (D) $-3x-5y+c=0$

Or on sait que $A(-2;1)$ et $A\in(\Delta)$

Donc : $-3\times(-2)-5\times1+c=0$ c'est-à-dire : $6-5+c=0$ donc : $c=-1$

Par suite : $(\Delta):-3x-5y-1=0$ ou $(\Delta):3x+5y+1=0$

b) On cherche une représentation paramétrique de la droite (Δ)

On a : (Δ) la droite passe par $A(-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

Donc : une représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $(\Delta)\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

c) Montrons que : $B\in(\Delta)$

Méthode1 : On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$ et $B(3;-2)$ alors : $3x_B+5y_B+1=3\times3+5\times(-2)+1$

$=9-10+1$

$=0$ Par suite : $B\in(\Delta)$

Méthode2 : On a : : $(\Delta)\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ et $B(3;-2)$ alors : $\begin{cases} 3=5t-2 \\ -2=-3t+1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 5=5t \\ -3=-3t \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \end{cases}$ (On trouve la même valeur pour $t\in\mathbb{R}$)

Par suite : $B\in(\Delta)$

Remarque : si on trouve des valeurs différentes pour t alors le point n'appartient pas a la droite

d) On cherche les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY).

Méthode1 : On a : $(\Delta)\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} 5t-2=0 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} t=\frac{2}{5} \\ y=-3t+1 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} t=\frac{2}{5} \\ y=-3\times\frac{2}{5}+1=-\frac{1}{5} \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$ par suite : $F\left(0;-\frac{1}{5}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

<u>Méthode2 :</u> On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 3\times0+5y+1=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 5y=-1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$

Par suite : $F\left(0;-\frac{1}{5}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

e) On cherche les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX).

<u>Méthode1 :</u> On a : (Δ) $\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=5t-2 \\ y=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=5t-2 \\ -3t+1=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=5t-2 \\ t=\frac{1}{3} \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=5\times\frac{1}{3}-2=-\frac{1}{3} \\ y=0 \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\frac{1}{3};0\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

<u>Méthode2 :</u> On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 3x+5\times0+1=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 3x=-1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\frac{1}{3};0\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante : (D) $\begin{cases} x=6t-3 \\ y=2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite (D)

<u>Méthode1 : Soit</u> $t\in\mathbb{R}$; on a : $(D)\ \begin{cases}x=6t-3\\ y=2t\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x+3=6t\\ y=2t\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}\dfrac{x+3}{6}=t\\ \dfrac{y}{2}=t\end{cases}$

Donc on obtient : $\frac{x+3}{6}=\frac{y}{2}$ (On Ecrit cette Equation sous la forme ax + by + c = 0):

Équivaut à : $\frac{x+3}{6}=\frac{3y}{6}$ Équivaut à : $x+3=3y$ Équivaut à : $x-3y+3=0$

Équivaut à : (D) : $x-3y+3=0$

<u>Méthode2 :</u> on a : $(D)\ \begin{cases}x=6t-3\\ y=2t\end{cases}$

Donc : la droite (D) passe par $E(-3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(6;2)$

Une équation cartésienne de la droite (D)s'écrit sous la forme : $(\Delta)\ ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (D)est $\vec{v}(-b;a)$ or on a : $\vec{v}(6;2)$

Donc : $a=2$ et $b=-6$ alors l'équation devient : (D) $2x-6y+c=0$

Or on sait que $E(-3;0)$et $E\in(D)$

Donc : $2\times(-3)-6\times0+c=0$ c'est-à-dire : $-6+0+c=0$donc : $c=6$ Par suite : $(D)\ 2x-6y+6=0$

C'est-à-dire après simplification : (D) : $x-3y+3=0$

2)b) Montrons que les droites (D)et (Δ) sont sécantes, puis déterminons leurs points d'intersection.

<u>Méthode1 :</u> On a : (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

On a : $(D)\ \begin{cases}x=6t-3\\ y=2t\end{cases}$: Un vecteur directeur de (D)est $\vec{v}(6;2)$

Ou On a : (D) : $x-3y+3=0$: Un vecteur directeur de (D)est $\vec{v'}(3;1)$

$$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}5 & 6\\ -3 & 2\end{vmatrix}=5\times2-(-3)\times6=10+18=28\neq0$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires alors les droites (D)et (Δ) sont sécantes

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases}(D):x-3y+3=0\\ (\Delta):3x+5y+1=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x-3y=-3\\ 3x+5y=-1\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x-3y=-3 & (\times-3)\\ 3x+5y=-1 & (\times1)\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}-3x+9y=9\\ 3x+5y=-1\end{cases}$

On fait la somme des Equations (1) et (2) on obtient : $14y=8$Équivaut à : $y=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$

D'où : $x-3y=-3$ Équivaut à : $x=3y-3$ Équivaut à : $x=3\times\frac{4}{7}-3=\frac{12}{7}-3=-\frac{9}{7}$

Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{9}{7};\frac{4}{7}\right)\right\}$

Méthode2 : On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$ et on a : $(D)\ \begin{cases} x=6t-3 \\ y=2t \end{cases}$

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=6t-3 \\ y=2t \\ (\Delta):3x+5y+1=0 \end{cases}$ D'où : $3(6t-3)+5(2t)+1=0$

Équivaut à : $18t-9+10t+1=0$ Équivaut à : $28t-8=0$ Équivaut à : $28t=8$

Équivaut à : $t=\frac{8}{28}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

Donc : $\begin{cases} x=6\times\frac{2}{7}-3=\frac{12}{7}-3=-\frac{9}{7} \\ y=2\times\frac{12}{7}=\frac{4}{7} \end{cases}$ Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{9}{7};\frac{4}{7}\right)\right\}$

3) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D') parallèles a (D) passant par $C(4;-1)$

On a : (D') passe par le point $C(4;-1)$ et parallèle a (D) et $\vec{v}(6;2)$ un vecteur directeur de (D)

Donc : $\vec{v}(6;2)$ est aussi un vecteur directeur de (D')

Donc : (D') passe par le point $C(4;-1)$ et $\vec{v}(6;2)$ un vecteur directeur de (D')

Donc : une représentation paramétrique de la droite (D') est : $(D')\ \begin{cases} x=6t+4 \\ y=2t-1 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Exercice4 : Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points suivants : $A(-2;1)$; $B(2;4)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;2)$

2) On associe à chaque nombre réel m la droite $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$

Et soit (D') la droite définie par l'équation cartésienne suivante : $(D'):-\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0$

a) Donner la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle a (D')

b) Donner la valeur de m pour que B soit un point de (D_m)

c) Montrer que tous les droites (D_m) passent par un point fixe E, dont vous déterminez les coordonnées.

Solution :1) On cherche une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;2)$

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(D)$

$M(x;y)\in(D)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+2;y-1)$ et $\vec{u}(5;2)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $2(x+2)-5(y-1)=0$

Équivaut à : $2x+4-5y+5=0$ Équivaut à : $2x-5y+9=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (D) est : $(D):2x-5y+9=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : (D) $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(5;2)$

Donc : $a=2$ et $b=-5$ alors l'équation devient : (D) $2x-5y+c=0$

Or on sait que $A(-2;1)$ et $A\in(\Delta)$

Donc : $2\times(-2)-5\times1+c=0$ c'est-à-dire : $-4-5+c=0$ donc : $c=9$

Par suite : $(\Delta):2x-5y+9=0$

2) On a : $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$ et $(D'):-\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0$

a) Déterminons la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle à (D')

Soit : $m\in\mathbb{R}$ on a : $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$ et $(D'):-\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0$

Donc : $\vec{u}_m(2m\,;m-1)$ est vecteur directeur de (D_m) et $\vec{v}\left(-1\,;-\frac{2}{3}\right)$ est vecteur directeur de (D')

(D_m) est parallèle à (D') signifie $\vec{u}_m(2m\,;m-1)$ et $\vec{v}\left(-1\,;-\frac{2}{3}\right)$ sont colinéaires

Signifie $\det\left(\vec{u}_m;\vec{v}\right)=0$ Equivaut à : $\begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m-1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=0$

Equivaut à : $-\frac{2}{3}\times2m-(-1)(m-1)=0$ Equivaut à : $-\frac{4}{3}m+m-1=0$ Equivaut à : $-\frac{m}{3}-1=0$

Equivaut à : $\frac{-m-3}{3}=0$ c'est-à-dire : $\boxed{m=-3}$

Pour que (D_m) est parallèle à (D')) il faut que $m=-3$

b) On cherche la valeur de m pour que : $B\in(D_m)$

Soit : $m\in\mathbb{R}$ on a : $B(2;4)\in(D_m)$ Equivaut à : $(m-1)\times2-2m\times4+3=0$

Equivaut à : $2m-2-8m+3=0$

Equivaut à : $-6m+1=0$ c'est-à-dire : $\boxed{m=\frac{1}{6}}$

Pour que $B\in(D_m)$ il faut que $m=\frac{1}{6}$

c) Montrons que tous les droites (D_m) passent par un point fixe E

Soit : $m\in\mathbb{R}$; $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$

$E(x_E;y_E)\in(D_m)$ signifie : $(m-1)x_E-2my_E+3=0$

Equivaut à : $mx_E-x_E-2my_E+3=0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

Equivaut à : $m(x_E-2y_E)+3-x_E=0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

Cela Signifie que : $x_E - 2y_E = 0$ et $3 - x_E = 0$
Cela Signifie que : $3 - 2y_E = 0$ et $x_E = 3$
Cela Signifie que : $y_E = \frac{3}{2}$ et $x_E = 3$

Donc toutes les droites (D_m) passent par un point fixe : $E\left(3\,;\,\frac{3}{2}\right)$

Exercice5 : Soient ABCD un parallélogramme et M le point de la droite (AD) et N le point tel que : $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{AM}$ et on considère le Repère : $\left(A;\vec{i};\vec{j}\right)$ tel que : $\vec{i} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AB}$ et soit m l'abscisse du point M dans le ce Repère.
1)Déterminer les coordonnées du point N .
2)Donner une équation cartésienne de la droite (MN).
3)Montrer que quel que soit la position du point M sur la droite (AD) alors la droite (MN) passe par un point fixe F qui ne dépend pas du point et dont on déterminera les coordonnées.

Solution : ABCD un parallélogramme et $M \in (AD)$ et $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{AM}$

1) On considère le Repère $\left(A;\vec{i};\vec{j}\right)$: $\vec{i} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AB}$

m L'abscisse du point M dans le Repère $\left(A;\vec{i};\vec{j}\right)$: Equivaut à : $\overrightarrow{AM} = m\vec{i}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD}$ ($M \in (AD)$ donc : $y_M = 0$) Donc : $N(m;0)$
Détermination des coordonnées du point N ?
On a : $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{AM}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AM}$
Equivaut à : $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$
Equivaut à : $\overrightarrow{AN} = -3m\vec{i} + \vec{j}$ par suite : $N(-3m;1)$
2) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (MN)
On a : $N(-3m;1)$ et $N(m;0)$

Soit $L(x;y) \in (MN)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{ML};\overrightarrow{MN}\right) = 0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x-m & -4m \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$ Equivaut à : $x - m + 4my = 0$ par suite : $(MN): x + 4my - m = 0$

3) $F \in (MN)$ Quel que soit m on a : $x_F + 4my_F - m = 0$
Equivaut à : $x_F + m(4y_F - 1) = 0$

Equivaut à : $x_F = 0$ et $4y_F - 1 = 0$ Equivaut à : $x_F = 0$ et $y_F = \frac{1}{4}$ par suite : $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien