Cours avec Exercices d'application avec solutions
Tronc commun Sciences BIOF
PROF : ATMANI NAJIB
http:// www.xriadiat.com

Leçon : Equations et inéquations et systèmes partie2

Présentation globale
Chapitre n° 2
Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

1) Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

a) Activité : Soit dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x-y+4=0$

1) Vérifier que les couples : $(0;4)$ et $(1;6)$ sont solution de l'équation : $2x-y+4=0$

2) Pourquoi $(1;2)$ n'est pas solution de l'équation ?

3) Donner deux autres couples solution de l'équation : $2x-y+4=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x-y+4=0$

Solution : a) $2\times0-4+4=-4+4=0$

Donc : $(0;4)$ est solution de l'équation : $2x-y+4=0$

b) $2\times1-6+4=2-6+4=0$

Donc : $(1;6)$ est solution de l'équation : $2x-y+4=0$

2) On a : $2\times1-2+4=2-2+4=4\neq0$

Donc : $(1;2)$ n'est pas solution de l'équation : $2x-y+4=0$

3) on donne par exemple à x une valeur et on cherche y :
a) Par exemple : $x=2$ donc : $2\times2-y+4=0$ Équivalent à : $-y+8=0$

Équivalent à : $y=8$ donc : Donc : $(2;8)$ est solution de l'équation

a) Par exemple : $x=-1$ donc : $2\times(-1)-y+4=0$ Équivalent à : $-y+2=0$

Équivalent à : $y=2$ donc : Donc : $(-1;2)$ est solution de l'équation

Remarques : L'équation $2x-y+4=0$ a une infinité de solutions

4) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x-y+4=0$

On a $2x-y+4=0$ équivalent à : $y=2x+4$ Donc : $S=\{(x;2x+4)/x\in\mathbb{R}\}$

b)Définition : On appelle système de deux équations du premier degré a deux inconnues toute système de la forme : $(I)\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ où les coefficients *a*, *b*, *c* , *d* sont des réels donnés et le couple (x,y) est l'inconnue dans $\mathbb{R}^2$

Résoudre le système (I) c'est déterminer l'ensemble S des solutions c'est a dire l'ensemble des couples (x,y) qui vérifient les deux équations : $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ simultanément

2) Méthode de résolutions d’un Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

Pour Résoudre un système (I) on utilise généralement quatre méthodes :

- Méthode de substitution
- Méthode de combinaison linéaire ou addition
- Méthode des déterminants
- Méthode graphique

a) Méthode de substitution : Substituer, c'est remplacer par (Mettre à la place de).

Exemple : Dans le système $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$, on exprime *x* en fonction de *y* dans la première équation et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} x=3-2y \\ 2x+3y=4 \end{cases}$.

On remplace ensuite *x* par $3-2y$ dans la seconde équation, ce qui donne le système :

$\begin{cases} x=3-2y \\ 2(3-2y)+3y=4 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x=3-2y \\ -y+6=4 \end{cases}$, soit encore à $\begin{cases} x=3-2y \\ y=2 \end{cases}$ et on remplace y par 2 dans la première équation on trouve $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

On obtient ainsi le couple Solution donc : $S=\{(-1,2)\}$

b) Méthode de combinaison linéaire ou méthode par addition.

Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des facteurs bien choisis. En additionnant membre à membre les deux équations transformées, on obtient une équation à une seule inconnue que l'on peut résoudre.

Exemple : Dans le système $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$, on multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 9x-6y=12 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 13x=26 \end{cases}$ équivalent : $\begin{cases} 8+6y=14 \\ x=2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 6y=6 \\ x=2 \end{cases}$ encore ou $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$. On en déduit le couple solution : $S=\{(2,1)\}$.

Remarque : Un système peut n'avoir aucune solution ou encore une infinité de solutions.

Soit le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$. Si les coefficients de *x* et de *y* sont proportionnels, c'est-à-dire si $ab'=a'b$, ce système a une infinité de solutions ou pas de solutions

– si de plus $ac'\neq a'c$, alors le système n'a pas de solution ;

– si $ac'=a'c$ (les coefficients des deux équations sont proportionnels), alors le système a une infinité de solutions.

Exercice01 : Résoudre le système dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

Par 4 Méthodes

Solution : 1) Par la Méthode de substitution

A l'aide de l'équation $3x+y=5$ on peut écrite que. $y=5-3x$

On obtient alors le système : $\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

On va maintenant remplacer le y de la seconde équation par son expression en fonction de x qu'on vient de trouver.

Cela donne alors : $\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3(5-3x)=-4 \end{cases}$

On développe et on simplifie l'écriture de la deuxième équation : $\begin{cases} y=5-3x \\ 11x=11 \end{cases}$

On résout maintenant l'équation du premier degré pour trouver la valeur de x : $\begin{cases} y=5-3x \\ x=1 \end{cases}$

Maintenant qu'on connaît la valeur de x , il ne nous reste plus qu'à remplacer x par sa valeur dans la première équation. $\begin{cases} y=5-3\times1=2 \\ x=1 \end{cases}$; On finit les calculs : $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

La solution de notre système est donc : $S=\{(1,2)\}$

Il peut être utile de procéder à une vérification. Pour cela, on remplace les inconnues par les valeurs qu'on vient de trouver dans chacune des équations et on vérifie si on retrouve bien l'égalité :

$$\begin{cases} 3\times1+2=3+2=5\checkmark \\ 2\times1-3\times2=2-6=-4\checkmark \end{cases}$$

2) Par la méthode combinaison linéaire ou méthode par addition.

Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.

On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue x. Pour cela on va :

multiplier la première équation par 2 qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.

Multiplier la seconde équation par 3 qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.

On obtient alors le système : $\begin{cases} 6x+2y=10 \\ 6x-9y=-12 \end{cases}$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en x.

$$\begin{array}{rrcrl} & 6x & + & 2y & =10 \\ -(& 6x & - & 9y & =-12) \\ \hline & & & 11y & =22 \\ & & \text{donc} & y & =2 \end{array}$$

On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :

Si on choisit la première équation $3x+2=5$ soit $3x=3$ et donc $x=1$.

La solution du système est donc : $S=\{(1,2)\}$

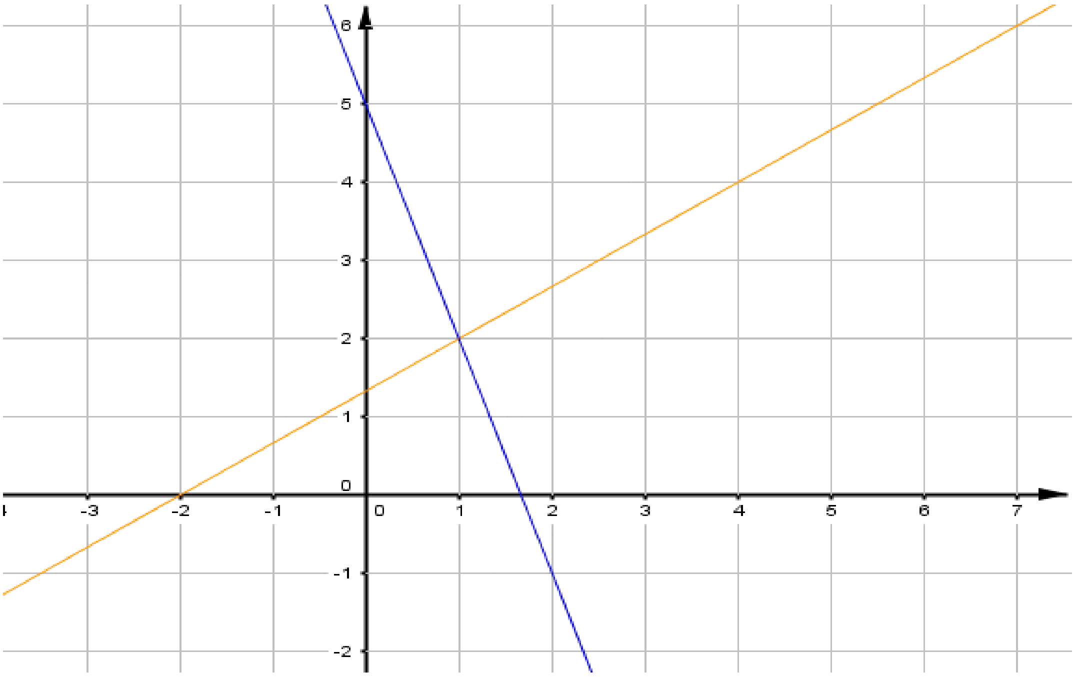
c) Méthode graphique :

Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

Les équations du type $ax+by=c$ correspondent en fait à des équations de droite.

La solution du système correspond aux coordonnées, dans un repère, du point d'intersection des deux droites.

on a tracé les deux droites associées au système



On lit les coordonnées du point d'intersection $(1,2)$

Donc : $S=\{(1,2)\}$

On distingue alors trois cas dans la résolution des systèmes graphiquement :

- Si les droites sont parallèles et distinctes, le système (S) n'admet aucun couple solution.
- Si les droites) sont sécantes, le système (S) admet une solution unique.
- Si les droites sont confondues, alors le système (S) admet une infinité de couples solutions.

d) Méthode des déterminants

Définition : Soit le système de deux équations a deux inconnues suivant : $(I)\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$

Le nombre réel noté : $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$

S'appelle le déterminant du système (I)

Le critère suivant permet d'en savoir plus long sur le nombre de solutions d'un système....

Proposition : Soit le système de deux équations à deux inconnues suivantes :

$(I)\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ et Δ son déterminant

1) Si $\Delta\neq 0$ alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x=\dfrac{\begin{vmatrix}c & b\\c' & b'\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{cb'-c'b}{\Delta}$; $y=\dfrac{\begin{vmatrix}a & c\\a' & c'\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{ac'-a'c}{\Delta}$

2) Si $\Delta=0$ alors :

✓ Si $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ alors : les deux équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont équivalentes et dans ce cas Résoudre le système c'est Résoudre l'une des équations par exemple en choisi : $ax + by = c$ et alors on a : $S = \left\{ \left(x; \frac{c - ax}{b} \right) / x \in \mathbb{R}; b \neq 0 \right\}$

✓ Si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ alors le système (I) n'admet aucun couple solutions et donc $S = \varnothing$

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :1) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 4y = -6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x + 4y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = \sqrt{2} \\ 2x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$ 4) $(I) \begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ x - 3y = -11 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ **5)** $(I) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Solution : 1) Le déterminant est : $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-1) \times 2 = 14 \neq 0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{5 \times 4 - (-6) \times (-1)}{14} = \frac{20 - 6}{14} = \frac{14}{14} = 1$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}{14} = \frac{3 \times (-6) - 5 \times 2}{14} = \frac{-18 - 10}{14} = \frac{-28}{14} = -2$

On en déduit le couple solution : $S = \{(1, -2)\}$.

2) Le déterminant est : $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$ alors on calcule $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8 \neq 0$

Donc $S = \varnothing$

3) $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = \sqrt{2} \\ 2x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$; Le déterminant est : $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$

Alors on calcule : $\Delta_x = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$

Alors on calcule $\Delta_y = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$

Donc les deux équations $\sqrt{2}x - y = \sqrt{2}$ et $2x - \sqrt{2}y = 2$ sont équivalentes et dans ce cas Résoudre le système c'est Résoudre l'une des équations par exemple en choisi $\sqrt{2}x - y = \sqrt{2}$

C'est-à-dire : $\sqrt{2}x - \sqrt{2} = y$ et alors on a : $S = \left\{ \left(x; \sqrt{2}x - \sqrt{2} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

4) $(I) \begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ x - 3y = -11 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ Soit le système $(I') \begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$

Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-12-2=-14\neq 0$

Alors le système (I') admet une solution unique :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -11 & -3\end{vmatrix}}{-14}=\frac{28}{-14}=-2 \quad \text{et} \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{1}=\frac{2}{1}=2$$

Donc $(-2,3)$ est une solution du système (I')

On remplace dans la dernière équation c'est-à-dire : $x-3y=-11$

On a $2\times(-2)+4\times 3=-4+12=8$

Donc $(-2,3)$ vérifie toutes les équations ; on en déduit que : $S=\{(-2,3)\}$

5) $(I)\begin{cases}x-2y=1\\ 3x+y=2\\ x-y=3\end{cases}$ Soit le système $(I')\begin{cases}x-2y=1\\ x-y=3\end{cases}$

Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$; alors le système (I') admet une solution unique

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}}{1}=\frac{5}{1}=5 \quad \text{et} \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & -11\end{vmatrix}}{-14}=\frac{-42}{-14}=3$$

Donc $(-2,3)$ est une solution du système (I')

On remplace dans les deuxièmes équations c'est-à-dire : $3x+y=2$

On a $3\times 5+2=17\neq 2$

Donc $(-2,3)$ ne vérifie pas toutes les équations

On en déduit que : $S=\varnothing$

3)Applications : RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Exemple1 : Dans une boulangerie, Ali a acheté deux croissants et un pain. Il a payé 6 dh 50
Dans la même boulangerie, Aicha a acheté un croissant et trois pains. Elle a payé 5dh 50.
Quel est le prix d'un croissant et d'un pain dans cette boulangerie ?

Solution : **<u>Méthode de résolution :</u>** Pour résoudre un problème avec deux inconnues :
1) On pose x="la première inconnue" et **y =** "la deuxième inconnue".
Pour ce problème, on écrit : "J'appelle x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain "
Ou : "Soit x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain ".
2) On écrit les équations correspondant au problème : $2x+1y=6.5$ et $1x+3y=5.5$

On place les équations l'une en dessous de l'autre dans une grande accolade : $\begin{cases}2x+1y=6.5\\ 1x+3y=7\end{cases}$

3) On résout le système avec l'une des trois méthodes on trouve : $x=2,5$ et $y=1,5$

4) Vérification des résultats : $\begin{cases}2\times 2.5+1\times 1.5=6.5\\ 1\times 2.5+3\times 1.5=7\end{cases}$

5) le prix d'un croissant est $x=2,5$ DH et le prix d'un pain $y=1,5$ DH

Exemple2 : L'association des enfants Heureux organise une course. Chaque enfant a un vélo ou un tricycle. L'organisateur a compté 64 enfants et 151 roues.
1) Combien de vélos et combien de tricycles sont engagés dans cette course ?

2) Chaque vélo engagé rapporte 500 Dh et chaque tricycle 400 Dh. Calculer la somme que l'association des Enfants Heureux recevra.

Solution :1) Première étape : on identifie ce que nos inconnues vont représenter.
On cherche le nombre de vélos et le nombre de tricycle engagés.
On va donc appeler V le nombre de vélos et T le nombre de tricycles.
Deuxième étape : on met en équation le problème donné.
On a 64 enfants. Cela signifie donc que $V+T=64$.
On a compté 151 roues. Chaque vélo possède 2 roues et chaque tricycle possède 3 roues.
On a donc l'équation $2V+3T=151$.

Troisième étape : On résout le système : $\begin{cases} V+T=64 \\ 2V+3T=151 \end{cases}$

A l'aide de la méthode par substitution.

$\begin{cases} V=64-T \\ 2V+3T=151 \end{cases}$ $\begin{cases} V=64-T \\ 2(64-T)+3T=151 \end{cases}$ $\begin{cases} V=64-T \\ 128-2T+3T=151 \end{cases}$ $\begin{cases} V=64-T \\ T=23 \end{cases}$

$\begin{cases} T=23 \\ V=64-23 \end{cases}$ $\begin{cases} T=23 \\ V=41 \end{cases}$

On vérifie que le couple $(41,23)$ est bien solution du système.

$$\begin{cases} 41+23=64\checkmark \\ 2\times 41+3\times 23=82+69=151\checkmark \end{cases}$$

A l'aide de la méthode par combinaisons linéaires

$$\begin{cases} V+T=64 & (\times 2) \\ 2V+3T=151 & (\times 1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcccl} & 2V & + & 2T & =128 \\ -(& 2V & + & 3T & =151) \\ \hline & & & -T & =-23 \\ & & \text{donc} & T & =23 \end{array}$$

On reporte cette valeur dans la première équation :
$V+23=64$ donc $V=64-23$ et finalement $V=41$.
On contrôle que les valeurs trouvées vérifient la seconde équation
: $2\times 41+3\times 23=82+69=151\checkmark$.
Conclusion : 41 vélos et 23 tricycles étaient engagés dans cette course.
2)On utilise ces valeurs pour répondre à la question posée.
$41\times 500+23\times 400=29\ 700$
L'association recevra donc $29\ 700$Dh grâce à cette course.

Exemple3 : 1) On considère le système suivant : $\begin{cases} 45x+30y=510 \\ 27x+20y=316 \end{cases}$

a) Les nombres $x=10$ et $y=2$ sont-ils solutions de ce système ?
b) Résoudre le système.
2) Pour les fêtes de fin d'année, un groupe d'amis souhaite emmener leurs enfants assister à un spectacle.Les tarifs sont les suivants :
- 45 dh par adulte et 30 par enfant s'ils réservent en catégorie 1.
- 27 dh par adulte et 20 dh par enfant s'ils réservent en catégorie 2.

Le coût total pour ce groupe d'amis est de 510 dh s'ils réservent en catégorie 1 et 316 dh s'ils réservent en catégorie 2.
Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants de ce groupe?

Solution :
1) a) Regardons si les nombres $x=10$ et $y=2$ vérifient chacune des deux équations
$45\times 10+30\times 2=450+60=510\checkmark$

$27 \times 10 + 20 \times 2 = 270 + 40 = 310 \neq 316$

Le couple $(10,2)$ n'est donc pas solution du système.

b) Nous allons résoudre ce système à l'aide de combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} 45x + 30y = 510 & (\times 20) \\ 27x + 20y = 316 & (\times 30) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcccl} & 900x & + & 600y & = 10\,200 \\ -(& 810x & + & 600y & = 9\,480) \\ \hline & 90x & & & = 720 \\ & & \text{donc} & x & = 8 \end{array}$$

On reporte ce résultat dans la première équation :

$45 \times 8 + 30y = 510$ soit $360 + 30y = 510$ donc $30y = 150$ d'où $y = 5$.

On vérifie que le couple $(8,5)$ est bien solution de la seconde équation :

$27 \times 8 + 20 \times 5 = 216 + 100 = 316 \checkmark$.

Par conséquent la solution du système est . $(8,5)$

2. On appelle A le nombre d'adultes et E le nombre d'enfants.
Avec la première catégorie on obtient l'équation $45A + 30E = 510$.
Avec la seconde catégorie on obtient l'équation $27A + 20E = 316$.

On est donc ramené à résoudre le système $\begin{cases} 45A + 30E = 510 \\ 27A + 20E = 316 \end{cases}$.

D'après la question précédente le couple $(8,5)$ est solution de ce système.

Exercice02 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :1) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x + \left(\sqrt{2}-1\right)y = 0 \\ \left(\sqrt{2}+1\right)x + \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{cases}$

Solution : 1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2(x-2y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - 2y = 1 \Leftrightarrow -2y = 1 - x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

Donc le système admet une infinité de solutions : $S = \left\{ \left(x; \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

2) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases}$ On multiplie la 2 iem équation par -3 On aura : $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$ donc 2=1

Impossible donc : $S = \varnothing$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0\\ \left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y=1\end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & \sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$

$\Delta=\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)-\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(1\right)^2\right)$

Donc : $\Delta=(5-3)-(2-1)=1\neq 0$

$x=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & \sqrt{2}-1\\ 1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{1}=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2}+1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{1}=-\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$

Donc : $S=\left\{\left(1-\sqrt{2},\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right\}$

4) $\begin{cases}x+y=11\\ x^2-y^2=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\ (x+y)(x-y)=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\ 11(x-y)=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\ x-y=4\end{cases}$

On fait la somme membre a membre on trouve : $x+y+x-y=11+4$

Donc : $2x=15$ c'est-à-dire : $x=\dfrac{15}{2}$ et par suite : $\dfrac{15}{2}+y=11$

Donc : $y=\dfrac{7}{2}$

Donc : $S=\left\{\left(\dfrac{15}{2},\dfrac{7}{2}\right)\right\}$

Exercice03 : Pouvez-vous donner le poids de chacun ?

Solution : Les nombres «x : poids du garçon » et « y poids du fille » et « z poids du chien »

Satisfont donc au système formé par les équations : $\begin{cases}x+y=50\\ y+z=29\\ x+z=35\end{cases}$

Résolvons ce système : $\begin{cases}x+y=50\\ y+z=29\\ x+z=35\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}y=50-x\\ y+z=29\\ x+z=35\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}y=50-x\\ 50-x+z=29\\ x+z=35\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}y=50-x\\ -x+z=29-50\\ x+z=35\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}y=50-x\\ -x+z=-21\\ x+z=35\end{cases}$

Résolvons le système : $\begin{cases}-x+z=-21\\ x+z=35\end{cases}$ On additionne les deux membres terme à terme

Donc : $2z=35-21$ Donc : $2z=14$ Donc : $z=7kg$

On reporte ce résultat dans le système : $\begin{cases} x+y=50 \\ y+7=29 \\ x+7=35 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} x+y=50 \\ y=29-7 \\ x=35-7 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} x+y=50 \\ y=22 \\ x=28 \end{cases}$

Finalement : $x=28kg$ et $y=22kg$ et $z=7kg$

Exercice04 : **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} -7x-3y=4 \\ 4x+5y=-2 \end{cases}$

2) En déduire les solutions du système suivant : $\begin{cases} \dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2 \end{cases}$

Solution : 1) Le déterminant du système est : $\Delta=\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-35+12=-23\neq 0$

Donc : $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{14}{23}$ **et** $y=\dfrac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{2}{23}$

Donc : $S=\left\{\left(-\dfrac{14}{23},-\dfrac{2}{23}\right)\right\}$

2) Pour que le système existe il faut que : $x\neq 0$ et $y\neq 0$

$\begin{cases} -7\dfrac{1}{x}-3\dfrac{1}{y}=4 \\ 4\dfrac{1}{x}+5\dfrac{1}{y}=-2 \end{cases}$ On pose : $X=\dfrac{1}{x}$ et $Y=\dfrac{1}{y}$ Le système devient : $\begin{cases} -7X-3Y=4 \\ 4X+5Y=-2 \end{cases}$

D'après 1) on a : $X=-\dfrac{14}{23}$ et $Y=-\dfrac{2}{23}$

Donc : $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{14}{23}$ et $\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2}{23}$

Donc : $x=-\dfrac{23}{14}$ et $y=-\dfrac{23}{2}$ par suite : : $S=\left\{\left(-\dfrac{23}{14},-\dfrac{23}{2}\right)\right\}$

Exercice05 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6 \\ -3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=17 \end{cases}$

Solution : Pour que le système existe il faut que : $x\geq 0$ et $y\geq 0$ on pose : $X=\sqrt{x}$ et $Y=\sqrt{y}$

Le système devient : $\begin{cases} 2X+Y=6 \\ -3X+5Y=17 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X=1$ et $Y=4$

Donc : $\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=4$ donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=(1)^2$ et $\left(\sqrt{y}\right)^2=4^2$

Donc : $x=1$ et $y=16$ par suite : $S=\{(1,16)\}$

Exercice06 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x^2-5y^2=1 \\ 4x^2+3y^2=15 \end{cases}$

Solution : On pose : $X=x^2$ et $Y=y^2$

Le système devient : $\begin{cases} 2X-5Y=1 \\ 4X+3Y=15 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X=3$ et $Y=1$

Donc : $x^2=3$ et $y^2=4$

Donc : $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$ et $y=\sqrt{1}$ ou $y=-\sqrt{1}$

Donc : $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$ et $y=1$ ou $y=-1$

Par suite : $S=\left\{\left(\sqrt{3},1\right),\left(\sqrt{3},-1\right),\left(-\sqrt{3},1\right),\left(-\sqrt{3},-1\right)\right\}$

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} \left(x^2-3x+1\right)+\left(y^2-5y+4\right)=-3 \\ 2\left(x^2-3x+1\right)-3\left(y^2-5y+4\right)=4 \end{cases}$

Solution : On pose : $X=x^2-3x+1$ e$Y=y^2-5y+4$t

Le système devient : $\begin{cases} X+Y=-3 \\ 2X-3Y=4 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X=-1$ et $Y=-2$

Donc : $x^2-3x+1=-1$ et $y^2-5y+4=-2$ c'est-à-dire : $x^2-3x+21=0$ et $y^2-5y+6=0$

On résolve l'équation : $x^2-3x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(2)=1>0$

Donc : $x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=2$ et $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=\dfrac{3}{2}$

On résolve l'équation $y^2-5y+6=0$: $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$

Donc : $y_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}=3$ et $y_2=\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}=2$

Par suite on a : $S=\left\{(1,3);(1,2);(2,3);(2,2)\right\}$

Exercice08 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante : $\sqrt{x^2+1}=1$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x-y=-8 \\ 4x+3y=31 \end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2+8=0 \\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62 \end{cases}$

Solution : 1) $\sqrt{x^2+1}=1$ équivalent : $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=1^2$ équivalent : $x^2+1=1$ équivalent : $x^2=0$

Équivalent : $x=0$

Donc : $S=\{0\}$

2) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x-y=-8 \\ 4x+3y=31 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=-8 \\ 4x+3y=31 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y=x+8 \\ 4x+3(x+8)=31 \end{cases}$ équivalent : $\begin{cases} y=x+8 \\ 4x+3x+24=31 \end{cases}$

Équivalent : $\begin{cases} y=x+8 \\ 7x=7 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y=1+8 \\ x=1 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y=9 \\ x=1 \end{cases}$

La solution du système est donc : $S=\left\{(1,9)\right\}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-y^2+8=0\\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62\end{cases}$ Déduction des questions précédents des solutions du système :

$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-y^2+8=0\\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62\end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-y^2=-8\\ 2\left(4\sqrt{x^2+1}+3y^2\right)=62\end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-y^2=-8\\ 4\sqrt{x^2+1}+3y^2=31\end{cases}$

On pose : $\begin{cases}X=\sqrt{x^2+1}\\ Y=y^2\end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases}X-Y=-8\\ 4X+3Y=31\end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=1$ et $Y=2$

Donc : $\sqrt{x^2+1}=1$ et $y^2=9$

Donc : ($x=0$) et ($y=-3$ ou $y=3$) Par suite : $S=\left\{(0,3);(0,-3)\right\}$

Exercice09 : On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(I)\begin{cases}(m+1)x+3y=m\\ 3x+(m+1)y=2\end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta=(m-2)(m+4)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles : $\Delta=0$

2) Vérifier que : $\Delta_x=(m-2)(m+3)$ et $\Delta_y=-(m-2)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et discuter suivant le paramètre m le système : (I)

Solution :1) a) On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta=\begin{vmatrix}m+1 & 3\\ 3 & m+1\end{vmatrix}=(m+1)\times(m+1)-3\times3=(m+1)^2-3^2=(m+1-3)(m+1+3)=(m-2)(m+4)$$

b) $\Delta=0$ Signifie que : $(m-2)(m+4)=0$ Signifie que : $m-2=0$ ou $m+4=0$

$\Delta=0$ Signifie que : $m=2$ ou $m=-4$

2) $\Delta_x=\begin{vmatrix}m & 3\\ 2 & m+1\end{vmatrix}=m(1+m)-6=m^2+m-6$: a = 1, b = 1 ; c = -6

Le discriminent est : $b^2-4ac=1^2+24=25>0$

Donc : $x_1=\frac{-1-\sqrt{25}}{2a}=\frac{-1-5}{2\times1}=\frac{-6}{2}=-3$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{25}}{2a}=\frac{-1+5}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

Donc : $\Delta_x=m^2+m-6=1(m-(-3))(m-2)=1(m+3)(m-2)$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}m+1 & m\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2(1+m)-3m=-(m-2)$$

3)*1ere cas* : si $\Delta\neq0$ c'est-à-dire : $m\neq2$ et $m\neq-4$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{(m-2)(m+3)}{(m-2)(m+4)}=\frac{m+3}{m+4}\quad\text{et}\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-(m-2)}{(m-2)(m+4)}=-\frac{1}{m+4}$$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{m+3}{m+4};-\frac{1}{m+4}\right)\right\}$

2ere cas : si $\Delta=0$ c'est-à-dire : $m=2$ ou $m=-4$

Si $m=2$ on remplace m par 2 on trouve : $\begin{cases}3x+3y=2\\3x+3y=2\end{cases}$ qui est équivalent a : $3x+3y=2$

Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation $3x+3y=2$

$3x+3y=2$ est équivalent a : $3y=2-3x$ Signifie que : $y=\frac{2}{3}-x$

Alors on a : $S=\left\{\left(x;\frac{2}{3}-x\right)/\, x\in\mathbb{R}\right\}$

Si $m=-4$ on remplace m par -4 on trouve : $\begin{cases}-3x+3y=-4\\3x-3y=2\end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases}3x-3y=4\\3x-3y=2\end{cases}$ impossible

Donc: $S=\varnothing$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien