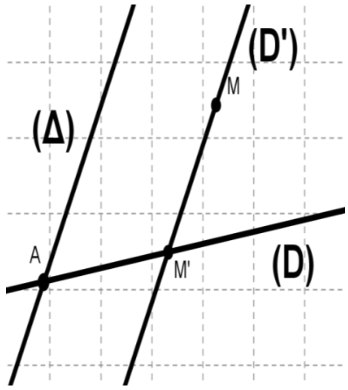
Cours la projection dans le plan avec Exercices avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB

Tronc commun Sciences BIOF

La projection dans le plan

1) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite



1)Définitions : Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un pont A , et soit M un point du plan ; la droite qui passe par M et parallèle à (Δ) coupe (D) en un point M'

Le point M's'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ) ou le projeté M sur (D) parallèlement à (Δ) ou l'image du point M par la projection $P_{(D;\Delta)}$ sur (D) parallèlement à (Δ) et on écrit : $P_{(D;\Delta)}(M)=M'$ ou $P(M)=M'$

La droite (Δ) s'appelle la direction de la projection.

$P(M)=M'$**:** M' L'image du point M par la projection P

Si $B\in(D)$ alors $P(B)=B$ on dit alors que le point B est invariant par la projection P

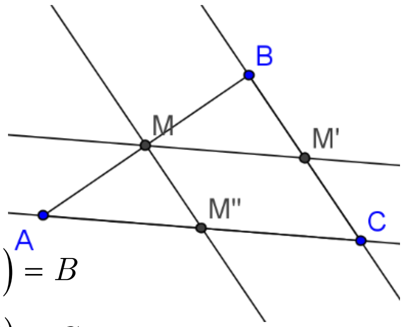
Activité1 : Soit ABC un triangle et M le Milieu de [AB]

1) Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC);

Déterminer : $P_1(A)$**;**$P_1(C)$**,**$P_1(B)$**,** $P_1(M)$

2) Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC) ;

Déterminer : $P_2(A)$ **,** $P_2(B)$ **,**$P_2(C)$ **,** $P_2(M)$



Correction : 1) Soit P_1 la projection sur(BC)parallèlement à (AC)

On a $A\in(AC)$ et $(AC)\cap(BC)=\{C\}$ Donc : $P_1(A)=C$

On a $B\in(BC)$ donc B est invariante par la projection P_1 donc $P_1(B)=B$

On a $C\in(BC)$ donc C est invariante par la projection P_1 donc $P_1(C)=C$

Soit $M'=P_1(M)$ on a **:** M le milieu de [AB]

La parallèle à (AC) passant par M passe forcément par le milieu de [BC]

Donc : M' est le milieu de [BC] .

2) Soit : P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC) : On a $A\in(AC)$ Donc $P_2(A)=A$

On a $C\in(AC)$donc C est invariante par la projection P_2 donc $P_2(C)=C$

On a $B\in(BC)$ et $(AC)\cap(BC)=\{C\}$

Donc :$P_2(B)=C$ **.**

On a M le milieu de [AB] donc la parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en son milieu.

Soit : M'' ce milieu donc $P_2(M)=M''$

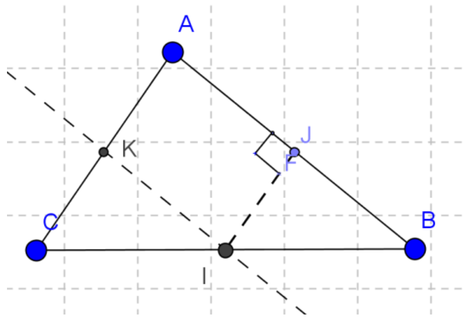
2) Propriétés :

■Chaque point de (D) est confondu avec sa projection
■Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)
■On dit que la droite (D) est globalement invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ)
■L'image du segment [AB] par la projection P est le segment *[A'B']* et on écrit : $P([AB]) = [A'B']$
■La projection conserve les milieux

Remarque : Si les droite (D) et (Δ) sont perpendiculaire
On dit que M' est la projection orthogonale de M sur (D)

Exercice01 : Soit ABC un triangle isocèle de sommet A ; Le point I est le milieu du segment [BC]
Le point J est la projection orthogonale de I sur la droite (AB) .
Le point K est la projection de I sur la droite (AC) parallèlement à (AB)
1) Faire une figure
2) Déterminer l'image du segment [BC] par la projection sur la droite (AC) parallèlement à (AB)
3) Déterminer le milieu du segment [AC]

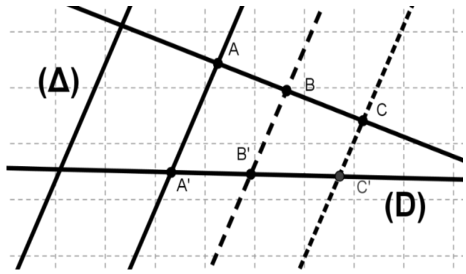
Correction : 1) La figure :



2)Par la projection sur la droite (AC) parallèlement à (AB)
On a : L'image de B est A et l'image de C est C
Donc : l'image du segment [BC] est le segment [AC]
3)Déterminons le milieu du segment AC] :
Le point I est milieu du segment [BC] donc son image qui est K est aussi le milieu de l'image de [BC] qui est [AC]
Donc : le milieu du segment [AC] est le point K car la projection conserve le milieu.

3) Théorème de Thales :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point et soient A ; B; C trois points alignés du plan tel que (AB) et (Δ) ne sont pas parallèles ; Soient A' ; B' ; C' et D' respectivement les projetés des points A ; B; C et D sur (D) parallèlement à (Δ)



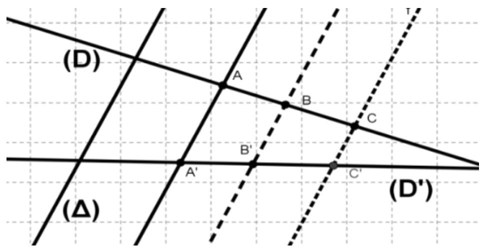
a) Alors : $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

b) Si : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$
La projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

c) Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$
La projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

4) Le théorème réciproque de Thalès :

Soient (D) et (D') deux droites non parallèles à une troisième (Δ) ; Soient A ; B deux points de la droite (D) tel que A' et B' respectivement les projetés des points A ; B sur (D') parallèlement à (Δ).



Si C un point de la droite (D) et C' un point de la droite (D') tel que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ et les points A ; B et C sont dans le même ordre sur la droite (D) que les points A' ; B' et C' sur la droite (D')
Alors : le point C' est la projection de C sur la droite (D') parallèlement à (Δ) et on a :
$(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$

Exercice02 : Soient ABC un triangle et D ; un point défini par : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

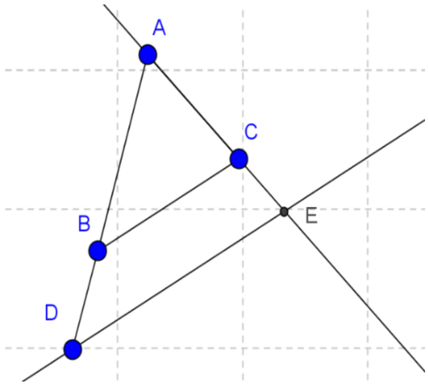
1) Faire une figure

2) La droite parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en E

a) Déterminer DE en fonction BC

b) Montrer que : $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Correction : 1) La figure



2)a) On a : A et B et D sont des points alignés et les points A et C et E

Sont des points alignés dans cet ordre et $(DE)\parallel(BC)$

Nous pouvons appliquer le théorème de Thalès : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

Or on a : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AD=\frac{3}{2}AB$: donc : $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{2}$ et par suite : $\frac{DE}{BC}=\frac{3}{2}$

Qui signifie que : $\boxed{DE=\frac{3}{2}BC}$

b) On a : $DE=\frac{3}{2}BC$ et les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et ont le même sens

Donc : $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Et on a : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{3}{2}$ donc : $AE=\frac{3}{2}AC$

Et puisque $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et ont le même sens Alors : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercice03 : Soient ABC est un triangle et M un point définie par : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Construire le point M'le projeté de M sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

2) Montrer que $\overrightarrow{AM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et en déduire que $\overrightarrow{MM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Réponse : 1) Soit : P la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A\in(AC)$ donc A est invariante par la projection P donc : $P(A)=A$

On a $C\in(AC)$ donc C est invariante par la projection P donc $P(C)=C$

On a aussi : $P(B)=C$ et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points *Alors :* $\overrightarrow{AM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien