Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir Maison n°2 : A sur les leçons suivantes :

- **L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles**
- **L'ordre dans $\mathbb{R}$**
- **La droite dans le plan**

Exercice01 : (1pts) Calculer et simplifier :

1) $A=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}$ 2) $B=\dfrac{(-10)^9\times(-6)^3}{(-25)^4\times3\times(-2)^{11}}$

Corrigé : 1) $A=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{\dfrac{3-1}{3}+\dfrac{3}{3+1}}{\dfrac{3+1}{3}-\dfrac{3}{3-1}}=\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}}{\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\dfrac{17}{12}}{-\dfrac{1}{6}}=\dfrac{17}{12}\times-6=-\dfrac{17}{2}$

2) $B=\dfrac{(-10)^9\times(-6)^3}{(-25)^4\times3\times(-2)^{11}}=\dfrac{-10^9\times-6^3}{25^4\times3\times-2^{11}}=-\dfrac{10^9\times6^3}{25^4\times3\times2^{11}}$

$B=-\dfrac{(5\times2)^9\times(3\times2)^3}{\left(5^2\right)^4\times3\times2^{11}}=-\dfrac{5^9\times2^9\times3^3\times2^3}{5^8\times3^1\times2^{11}}=-\dfrac{5^9\times2^{9+3}\times3^3}{5^8\times3^1\times2^{11}}=-5^9\times2^{12}\times3^3\times5^{-8}\times3^{-1}\times2^{-11}$

$B=-5^{9-8}\times2^{12-11}\times3^{3-1}=-5\times2\times9=-10\times9=-90$

Exercice02 : ($1\,pts$)

Monter que : $C=\dfrac{\sqrt{60}\times\sqrt{21}}{2\sqrt{35}}\in\mathbb{N}$

Corrigé : On a : $C=\dfrac{\sqrt{60}\times\sqrt{21}}{2\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{5\times3\times4}\times\sqrt{3\times7}}{2\sqrt{5\times7}}=\dfrac{2\times3\sqrt{5\times7}}{2\sqrt{5\times7}}=3\in\mathbb{N}$

Exercice03 : $2,5\,pts(0,5\,pts+1\,pts+1\,pts)$

On pose : $X=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) Déterminer le signe de X

2) Calculer : X^2.

3) En déduire une écriture simple de X .

Corrigé : 1) On a : $X=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Et on Remarque que : $6-2\sqrt{5}<6+2\sqrt{5}$

Donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}<\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ et par suite : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ est négatif

C'est à dire que : $X<0$

2) $X^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

$X^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

$$X^2=6-2\sqrt{5}-2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}+6+2\sqrt{5}$$
$$X^2=12-2\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}$$
$$X^2=12-2\sqrt{36-20}=12-2\sqrt{16}=12-8=4$$
3) $X^2=4$ Equivalent à : $X=\sqrt{4}$ ou $X=-\sqrt{4}$

Equivalent à : $X=2$ ou $X=-2$ or on a : $X<0$ Donc : $X=-2$.

Exercice04 : $5\,pts(1,5\,pts+1,5\,pts+2\,pts)$

1) Simplifier : $A=\sqrt{\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{\left(3+\sqrt{11}\right)^2}}$

2) Soient x et y deux réels tels que : $3<x<y$

Simplifier : $B=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(3-x)^2}-|y-1|$

3) Soient x et y deux réels tels que : $x\in\left]-1;3\right[$ et $y\in\left]-7;-2\right[$ et $x+y=\dfrac{1}{2}$

Simplifier : $E=3|2x+2|-|3y|+6|y+1|-2|y-2x|$

Corrigé : 1) Simplifions : $A=\sqrt{\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{\left(3+\sqrt{11}\right)^2}}$

$$A=\sqrt{\left(\frac{1}{3-\sqrt{11}}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{3+\sqrt{11}}\right)^2}=\left|\frac{1}{3-\sqrt{11}}\right|-\left|\frac{1}{3+\sqrt{11}}\right|=\frac{1}{\left|3-\sqrt{11}\right|}-\frac{1}{\left|3+\sqrt{11}\right|}$$

$A=\dfrac{1}{-\left(3-\sqrt{11}\right)}-\dfrac{1}{3+\sqrt{11}}$ Car : $3-\sqrt{11}<0$ $(3^2=9\ ;\ \sqrt{11}^2=11)$ et $3+\sqrt{11}>0$

$$A=\frac{-1}{3-\sqrt{11}}-\frac{1}{3+\sqrt{11}}=\frac{-\left(3+\sqrt{11}\right)-\left(3-\sqrt{11}\right)}{\left(3+\sqrt{11}\right)\left(3-\sqrt{11}\right)}=\frac{-6}{3^2-\sqrt{11}^2}=\frac{-6}{9-11}=\frac{-6}{-2}=\boxed{3}$$

1) Simplifions : $B=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(3-x)^2}-|y-1|$

Soient x et y deux réels tels que : $3<x<y$

$B=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(3-x)^2}-|y-1|$

$B=|x-y|+|3-x|-|y-1|$

On a : $3<x<y$ alors $x<y$ et donc : $x-y<0$

On a : $3<x<y$ alors $3<x$ et donc : $3-x<0$

On a : $3<x<y$ et $1<3$ et donc : $1<3<x<y$ et donc : $1<y$ et alors : $y-1>0$

Donc : $B=-(x-y)-(3-x)-(y-1)$

Donc : $B=-x+y-3+x-y+1$

Donc : $\boxed{B=-2}$

3) Simplifions : $E=3|2x+2|-|6y|+6|y+1|-2|y-2x|$

Soient x et y deux réels tels que : $x\in\left]-1;3\right[$ et $y\in\left]-7;-2\right[$

On a : $x\in\left]-1;3\right[$ donc : $-1<x<3$ et donc : $-2<2x<6$ et par suite : $0<2x+2<8$

Donc : $0<2x+2$ et alors : $|2x+2|=2x+2$: (1)

On a : $y\in]-7;-2[$ donc : $-7<y<-2$ et donc : $-42<6y<-12$ par suite : $6y<0$

Et alors : $|6y|=-6y$: (2)

On a : $-7<y<-2$ donc : $-6<y+1<-1$ par suite : $y+1<0$ et alors : $|y+1|=-(y+1)$: (3)

On a : $-1<x<3$ donc : $-6<-2x<2$ et $-7<y<-2$ et on a : $y-2x=y+(-2x)$

Donc : $-6+(-7)<y-2x<-2+2$

Donc : $-13<y-2x<0$ par suite : $|y-2x|=-(y-2x)=-y+2x$: (4)

D'après (1); (2) ; (3) et (4) on obtient : $E=3|2x+2|-|6y|+6|y+1|-2|y-2x|$

$E=3(2x+2)+6y-6(y+1)+2(y-2x)$

Donc : $E=6x+6+6y-6y-6+2y-4x$

Donc : $E=2x+2y=2(x+y)=2\times\frac{1}{2}=1$ car et $x+y=\frac{1}{2}$

Exercice05 : $(3,5pts)$

Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

$A=25x^2-5x$; $B=(3x-1)(2x-5)-4x^2+25$;

$C=(2x+1)(x^2-1)-3(x+1)(2x+1)+5x(2x+1)(x+1)$

$D=(3x+2)^3-27$; $E=x^3+8+3(x^2-4)-2(x+2)$

Corrigé : $A=10x^2-5x=5x\times2x-5x\times1$ donc $5x$ facteur commun

Donc : $A=5x(2x-1)$

$B=(3x-1)(2x-5)-2x^2+25$

$B=(3x-1)(2x-5)-\left((2x)^2-5^2\right)$ Mais $(2x)^2-5^2$ est du type : a^2-b^2

Donc : $B=(3x-1)(2x-5)-(2x-5)(2x+5)$ On a : $2x-5$ facteur commun

Donc : $B=(2x-5)[(3x-1)-(2x+5)]=(2x-5)(3x-1-2x-5)=(2x-5)(x-6)$

$C=(2x+1)(x^2-1)-3(x+1)(2x+1)+5x(2x+1)(x+1)$

$C=(2x+1)(x^2-1^2)-3(x+1)(2x+1)+5x(2x+1)(x+1)$

$C=(2x+1)(x+1)(x-1)-3(x+1)(2x+1)+5x(2x+1)(x+1)$ On a : $(2x+1)(x+1)$ facteur commun

Donc : $C=(2x+1)(x+1)(x-1-3+5x)=(2x+1)(x+1)(6x-4)=2(2x+1)(x+1)(3x-2)$

$D=(3x+2)^3-27=(3x+2)^3-3^3$ On a : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Donc : $D=((3x+2)-3)\left((3x+2)^2+3(3x+2)+3^2\right)$

Donc : $D=(3x+2-3)\left((3x)^2+2\times3x\times2+2^2+9x+6+9\right)$

Donc : $D=(3x-1)(9x^2+12x+4+9x+6+9)$

Donc : $D=(3x-1)(9x^2+21x+19)$

$E=x^3+8+3(x^2-4)-2(x+2)$

$E=x^3+2^3+3(x^2-2^2)-2(x+2)$ et on a : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab-b^2)$ et $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Donc : $E=(x+2)(x^2-2x+2^2)+3(x+2)(x-2)-2(x+2)$ On a : $x+2$ facteur commun

Donc : $E=(x+2)\left[(x^2-2x+2^2)+3(x-2)-2\right]$

Donc : $E=(x+2)(x^2-2x+4+3x-6-2)$

Donc : $E=(x+2)(x^2+x-4)$

Exercice06 : $4\,pts(2\,pts+1pts+1\,pts)$

Soient $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$ tel que : $|x-3|\leq 1$ et $|3y-x-6|\leq 2$

1) Montrer que : x ; y sont deux éléments de l'intervalle $[2;4]$

2) On pose $A=\frac{2x}{2x+y}$; donner un encadrement de A en précisant son amplitude

3) Montrer que : $\frac{13}{15}$ est une valeur approchée de A à $\frac{8}{15}$ prés

Corrigé : 1) $|x-3|\leq 1$ signifie $-1\leq x-3\leq 1$

Signifie $-1+3\leq x-3+3\leq 1+3$

Signifie $2\leq x\leq 4$

Signifie $x\in[2;4]$

$|3y-x-6|\leq 2$ Signifie $-2\leq 3y-x-6\leq 2$

Signifie $-2+x+6\leq 3y\leq 2+x+6$

Signifie $x+4\leq 3y\leq x+8$

On a : $2\leq x\leq 4$ donc : $x\leq 4$ donc : $x+8\leq 12$ et $3y\leq x+8$

Donc : $3y\leq 12$

Donc : $y\leq 4$ (1)

On a : $x+4\leq 3y$ et $2\leq x$ donc : $x+4\leq 3y$ et $6\leq x+4$

Donc : $6\leq 3y$ Donc : $2\leq y$ (2)

De : (1) et (2) on déduit que : $2\leq y\leq 4$ Signifie $y\in[2;4]$

2) On pose $A=\frac{2x}{2x+y}=2x\times\frac{1}{2x+y}$; cherchons un encadrement de A en précisant son amplitude

On a : $2\leq x\leq 4$ et $2\leq y\leq 4$

Donc : $4\leq 2x\leq 8$ et $2\leq y\leq 4$

Donc : $6\leq 2x+y\leq 12$ et $4\leq 2x\leq 8$

Donc : $\frac{1}{12}\leq\frac{1}{2x+y}\leq\frac{1}{6}$ et $4\leq 2x\leq 8$

Donc : $\frac{4}{12}\leq 2x\times\frac{1}{2x+y}\leq\frac{8}{6}$

Donc : $\frac{1}{3}\leq A\leq\frac{4}{3}$

Donc : c'est un encadrement de A son amplitude est : $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$

3) Montrons que : $\frac{13}{15}$ est une valeur approchée de A à $\frac{8}{15}$ prés

On a : $\frac{1}{3}\leq A\leq\frac{4}{3}$ donc : $\frac{1}{3}-\frac{13}{15}\leq A-\frac{13}{15}\leq\frac{4}{3}-\frac{13}{15}$ c'est-à-dire : $-\frac{8}{15}\leq A-\frac{13}{15}\leq\frac{7}{15}$

Donc : $-\frac{8}{15} \leq A-\frac{13}{15} \leq \frac{7}{15} \leq \frac{8}{15}$ donc : $-\frac{8}{15} \leq A-\frac{13}{15} \leq \frac{8}{15}$

Donc : $\left|A-\frac{13}{15}\right| \leq \frac{8}{15}$

Donc : $\frac{13}{15}$ est une valeur approchée de A à $\frac{8}{15}$ prés

Exercice07 : $3\,pts(1pts+1pts+0,5pts+0.5\,pts)$

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$ et les droites : $(D_1): 6x+3y+2=0$ et $(D_2): 3x-2y-1=0$.

1) Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et déterminer le point d'intersection $H(x;y)$

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

3) Etudier la position relative des droites (AB) et (D_1).

4) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point $C(1,2)$ et parallèle a (D_2)

Solutions : 1) $(6)\times(-2)-3\times3=-12-9=-21\neq0$

Donc : (D_1) et (D_2) se coupent et Le point d'intersection vérifie le système :

$\begin{cases}6x+3y+2=0\\3x-2y-1=0\end{cases}$ C'est-à-dire : $\begin{cases}6x+3y=-2\\3x-2y=1\end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix}6 & 3\\3 & -2\end{vmatrix}=-21\neq0$

Donc solution unique : $x=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{1}{21}$ et $y=\frac{\begin{vmatrix}6 & -2\\3 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{-21}=-\frac{4}{7}$

Par suite : le point d'intersection est $H\left(-\frac{1}{21};-\frac{4}{7}\right)$

2) la droite (AB) a une équation de la forme : (AB) : $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{AB}(2,-4)$ $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ donc : $a=-4$ et $b=-2$

L'équation devient : $-4x-2y\ +c=0$ et on a : $A\in(AB)$ donc : $-4-4+c=0$ c'est-à-dire : $c=8$

Donc : (AB) $-4x-2y+8=0$ ou : (AB) : $2x+y-4=0$

3) On a (AB) : $2x+y-4=0$ et $(D_1): 6x+3y+2=0$

Et on a : $(6)\times(1)-3\times2=6-6=0$ donc : (D_1) et (AB) sont parallèles

4) (Δ) est parallèle a (D_2) donc le vecteur directeur de (D_2) est un vecteur directeur de (Δ)

Donc : $\vec{u}(2;3)$ est un vecteur (Δ) qui passe par $C(1,2)$; Par suite (Δ) : $\begin{cases}x\ =1+2t\\y=2+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien