Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir Maison n°2 : B sur les leçons suivantes :

- **L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles**
- **L'ordre dans : $\mathbb{R}$**
- **La droite dans le plan**

Exercice01 : $3pts(0,5pts\times 6)$

Factorisez les expressions suivantes :

$A=16x^2-8x+1$; $B=x^3+64+3(x^2-16)-3x-12$; $C=x^5+x^3-x^2-1$; $D=x^4-49$;

$E=x^6+2x^3+1$; $F=a^2+4b^2-x^2+4ab$;

Corrigé : $A=16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times 4x\times 1+1^2=(4x-1)^2$

Pour B on Remarque que : $x^3+64=x^3+4^3$ identité remarquable du type : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$B=x^3+64+3(x^2-16)-3x-12=x^3+4^3+3(x^2-4^2)-3(x+4)$$

$$=(x+4)(x^2-4x+4^2)+3(x+4)(x-4)-3(x+4)$$

Donc : $B=(x+4)\left[(x^2-4x+16)+3(x-4)-3\right]=(x+4)(x^2-4x+16+3x-12-3)$

Donc : $B=(x+4)(x^2-x+1)$

$C=x^5+x^3-x^2-1$

$C=x^3(x^2+1)-(x^2+1)=(x^2+1)(x^3-1)=(x^2+1)(x^3-1^3)$ et $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$C=(x^2+1)(x-1)(x^2-x\times 1+1^2)=(x^2+1)(x-1)(x^2-x+1)$

$D=x^4-49=x^4-(\sqrt{7})^4=(x^2)^2-\left(\sqrt{7}^2\right)^2$

$D=\left(x^2-\sqrt{7}^2\right)\left(x^2+\sqrt{7}^2\right)=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+7)$

$E=x^6+2x^3+1$

$E=(x^3)^2+2\times x^3\times 1+1^2$ est du type : $a^2+2ab+b^2$

Donc : $E=(x^3+1)^2$

$F=a^2+4b^2-x^2+4ab$

$F=(a^2+4ab+4b^2)-x^2$

$F=\left(a^2+2\times a\times 2b+(2b)^2\right)-x^2=(a+2b)^2-x^2=(a+2b-x)(a+2b+x)$

Exercice01 : $(2pts)$ $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}^*$ et $a\geq b$

Montrer que : $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)$

Corrigé : Pour montrer que deux nombres positifs sont égaux on pourra montrer que leurs carrés sont égaux :On a : $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2=a+\sqrt{a^2-b^2}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2=\frac{2}{4}\times\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2=\frac{1}{2}\times\left(\left(\sqrt{a-b}\right)^2+2\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right)$$

$=\frac{2}{4}\times\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2=\frac{1}{2}\times\left(a-b+2\sqrt{(a-b)(a+b)}+a+b\right)=\frac{1}{2}\times\left(2a+2\sqrt{(a-b)(a+b)}\right)=a+\sqrt{(a-b)(a+b)}=a+\sqrt{a^2-b^2}$

Donc on a : $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)\right)^2$

Par suite : $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)$

Exercice03 : $(2pts)$

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $x^2-3x-8=0$ et $x>3$

Monter que : $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x-3}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-3}}\right)\in\mathbb{Q}$

Corrigé : On a : $x^2-3x-8=0$ donc : $x(x-3)=8$ C'est-à-dire : $x-3=\frac{8}{x}$

D'où $\frac{x-3}{x}=\frac{8}{x^2}$ et $\frac{x}{x-3}=\frac{x^2}{8}$

Par suite : $\sqrt{\frac{x-3}{x}}=\sqrt{\frac{8}{x^2}}=\frac{\sqrt{8}}{x}$ et $\sqrt{\frac{x}{x-3}}=\sqrt{\frac{x^2}{8}}=\frac{x}{\sqrt{8}}$ car $x>3>0$

Donc : $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x-3}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{8}}{x}-\frac{x}{\sqrt{8}}\right)$

$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{x}-\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{x}-\frac{x}{4}=\frac{8-x^2}{4x}$

Or : $x^2-3x-8=0$ implique $-3x=8-x^2$

Donc : $A=\frac{-3x}{4x}=\frac{-3}{4}\in\mathbb{Q}$

Exercice04 : $6pts(1pts\times 6)$

Soient : x et y des réels tels que : $-4<x<-1$ et $2<y<5$

1) Donner un encadrement pour chacun des nombres suivants :

a) $2x+3y+7$ b) $2x-3y-2$ c) $(2x-3)(3y+10)$ d) $(2x-3)^2-\sqrt{3y+10}$

2) En déduire un encadrement des nombres : $A=\frac{2x-3y-2}{2x+3y+7}$ et $B=\frac{3y+10}{2x-3y-2}$

Corrigé : Soient : x et y des réels tels que : $-4<x<-1$ et $2<y<5$

1)a) Encadrement de : $2x+3y+7$

On a : $-4<x<-1$ et $2<y<5$ donc : $-8<2x<-2$ et $6<3y<15$

Donc : $-8+6<2x+3y<-2+15$

Donc : $-2<2x+3y<13$

Donc : $-2+7<2x+3y+7<13+7$ Donc : $\boxed{5<2x+3y+7<20}$

b) Encadrement de : $2x-3y-2=2x+(-3y)-2$

On a : $-8<2x<-2$ et $6<3y<15$

Donc : $-8<2x<-2$ et $-15<-3y<-6$

Donc : $-8+(-15)<2x+(-3y)<-2+(-6)$

Donc : $-23<2x+(-3y)<-8$

Donc : $-23-2<2x-3y-2<-8-2$

Donc : $\boxed{-25<2x-3y-2<-10}$

c) Encadrement de : $(2x-3)(3y+10)$

On a : $-8<2x<-2$ et $6<3y<15$

Donc : $-8-3<2x-3<-2-3$ et $6+10<3y+10<15+10$

Donc : $-11<2x-3<-5$ et $16<3y+10<25$

Donc : $5<-(2x-3)<11$ et $16<3y+10<25$

Donc : $5\times16<-(2x-3)(3y+10)<11\times25$

Donc : $80<-(2x-3)(3y+10)<275$

Donc : $\boxed{-275<(2x-3)(3y+10)<-80}$

d) Encadrement de : $(2x-3)^2-\sqrt{3y+10}=(2x-3)^2+\left(-\sqrt{3y+10}\right)$

On a : $-11<2x-3<-5$ donc : $5<-(2x-3)<11$

Donc : $25<\left(-(2x-3)\right)^2<121$

Donc : $25<(2x-3)^2<121$ ①

On a aussi : $6<3y<15$ donc : $6+10<3y+10<15+10$

Donc : $16<3y+10<25$

Donc : $\sqrt{16}<\sqrt{3y+10}<\sqrt{25}$

Donc : $-5<-\sqrt{3y+10}<-4$ ②

Donc : ① et ②donnent : $25+(-5)<(2x-3)^2+\left(-\sqrt{3y+10}\right)<121+(-4)$

Donc : $\boxed{20<(2x-3)^2-\sqrt{3y+10}<117}$

2) a) Déduisons un encadrement du nombre : $A=\dfrac{2x-3y-2}{2x+3y+7}=(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}$

On a : $-25<2x-3y-2<-10$ et $5<2x+3y+7<20$

Donc : $10<-(2x-3y-2)<25$ et $\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{2x+3y+7}<\dfrac{1}{5}$

Donc : $\dfrac{10}{20}<-(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}<\dfrac{25}{5}$

Donc : $\dfrac{1}{2}<-(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}<5$

Donc : $-5<(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}<-\dfrac{1}{2}$ Par suite : $\boxed{-5<A<-\dfrac{1}{2}}$

2)b) Déduisons un encadrement du nombre : $B=\dfrac{3y+10}{2x-3y-2}=(3y+10)\times\dfrac{1}{2x-3y-2}$

On a : $16<3y+10<25$ et $-25<2x-3y-2<-10$

On a : $16<3y+10<25$ et $10<-(2x-3y-2)<25$

Donc : $16<3y+10<25$ et $\dfrac{1}{25}<-\dfrac{1}{(2x-3y-2)}<\dfrac{1}{10}$

Donc : $\dfrac{16}{25}<-(3y+10)\times\dfrac{1}{2x-3y-2}<\dfrac{25}{10}$

Donc : $-\dfrac{25}{10}<(3y+10)\times\dfrac{1}{2x-3y-2}<-\dfrac{16}{25}$

Par suite : $\boxed{-\dfrac{5}{2}<B<-\dfrac{16}{25}}$

Exercice05 : $3\,pts(0,5\,pts\times 6)$

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $x>1$; On pose : $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

1) Montrer que : $A-1=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$

2) a) Vérifier que : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

b) En déduire que : $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\le A-1\le\dfrac{1}{2(x-1)}$

3) a) Montrer que : $\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

b) En déduire que : $1+\dfrac{1}{2x}\le A\le\dfrac{1}{2(x-1)}+1$

4) Déduire que $\dfrac{9}{4}$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec la précision $\dfrac{1}{20}$

Corrigé : 1) Montrons que : $A-1=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $x>1$

$$A-1=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-1=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$$ (Le conjugué)

$$A-1=\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{x-x+1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$$

2) a) Vérifions que : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

Soit $x>1$: $2\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)=2\sqrt{x-1}-\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

On a : $-1\le 0$ alors : $x-1\le x$ par suite : $\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}$ donc : $\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\le 0$

D'où : $2\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\le 0$ c'est-à-dire : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ ①

D'autre part, on a : $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ et comme $\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\le 0$

Alors : $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\le 0$

Donc : $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$ ②

D'après ①et ②on obtient : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

b) Déduisons que : $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\le A-1\le\dfrac{1}{2(x-1)}$

Soit $x>1$: On a : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

Alors : $2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}\le\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\le\sqrt{x-1}\times 2\sqrt{x}$

Alors : $2(x-1)\le\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\le 2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x}$

Donc : $\frac{1}{2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x}}\leq\frac{1}{\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}\leq\frac{1}{2(x-1)}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\leq A-1\leq\frac{1}{2(x-1)}$

3) a) Montrons que : $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

Soit $x>1$; $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x(x-1)}-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x(x-1)}-x\right)\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x(x-1)}-x\right)\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}=\frac{x(x-1)-x^2}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}=\frac{x^2-x-x^2}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}$

Comme : $-x<-1$ et $-1<0$ alors : $-x<0$ et on sait que : $x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)>0$

Donc : $\frac{-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}\leq 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

b) Déduisons que : $1+\frac{1}{2x}\leq A\leq\frac{1}{2(x-1)}+1$

Soit $x>1$; On a : $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ alors : $\frac{1}{2x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ et comme : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\leq A-1$

Alors : $\frac{1}{2x}\leq A-1$ par suite : $\frac{1}{2x}\leq A-1\leq\frac{1}{2(x-1)}$

Donc : $1+\frac{1}{2x}\leq A\leq\frac{1}{2(x-1)}+1$

Par suite : $\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{2x}\leq\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}$

Donc : $\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{2x}-\frac{9}{4}\leq\sqrt{x}-\frac{9}{4}\leq\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}-\frac{9}{4}$

On prend : $x=5$ on obtient : $-\frac{1}{20}\leq\sqrt{5}-\frac{9}{4}\leq 0$ et comme : $0\leq\frac{1}{20}$

Alors : $-\frac{1}{20}\leq\sqrt{5}-\frac{9}{4}\leq\frac{1}{20}$ donc : $\left|\sqrt{5}-\frac{9}{4}\right|\leq\frac{1}{20}$

D'où : $\frac{9}{4}$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec la précision $\frac{1}{20}$

Exercice01 : $4\,pts(1\,pts+1\,pts+2\,pts)$ Soient ABCD un parallélogramme et M le point de la droite (AD) et N le point tel que : $\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{AM}$

Et on considère le Repère : $\left(A;\vec{i};\vec{j}\right)$ tel que : $\vec{i}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{AB}$ et soit m l'abscisse du point M Dans le ce Repère.

1)Déterminer les coordonnées du point N .
2)Donner une équation cartésienne de la droite (MN).

3)Montrer que quel que soit la position du point M sur la droite (AD) alors la droite (MN)passe par un point fixe F qui ne dépend pas du point et dont on déterminera les coordonnées.

Solution : ABCD un parallélogramme et $M \in (AD)$et $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{AM}$

1) On considère le Repère $(A;\vec{i};\vec{j})$: $\vec{i} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AB}$

m L'abscisse du point M dans le Repère$(A;\vec{i};\vec{j})$: Equivaut à : $\overrightarrow{AM} = m\vec{i}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD}$ ($M \in (AD)$ donc : $y_M = 0$) Donc : $N(m;0)$

Détermination des coordonnées du point N ?
On a : $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{AM}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AM}$
Equivaut à : $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$
Equivaut à : $\overrightarrow{AN} = -3m\vec{i} + \vec{j}$ par suite : $N(-3m;1)$
2) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (MN)
On a : $N(-3m;1)$ et $N(m;0)$

Soit $L(x;y) \in (MN)$ Equivaut à : $\det(\overrightarrow{ML};\overrightarrow{MN}) = 0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x-m & -4m \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$ Equivaut à : $x - m + 4my = 0$ par suite : $(MN): x + 4my - m = 0$

3) $F \in (MN)$ Quel que soit m on a : $x_F + 4my_F - m = 0$
Equivaut à : $x_F + m(4y_F - 1) = 0$

Equivaut à : $x_F = 0$ et $4y_F - 1 = 0$ Equivaut à : $x_F = 0$ et $y_F = \frac{1}{4}$ par suite : $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien