Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir Maison n°2 :C sur les leçons suivantes :

- **L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles**
- **L'ordre dans $\mathbb{R}$**
- **La droite dans le plan**

Exercice01 : $3\,pts(1pts+1pts+1\,pts)$

On pose : $A=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

1) Montrer que : $A=\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ 2) Montrer que : $\dfrac{(A-1)^2}{A}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

3) En déduire que : $\dfrac{(A-1)^4}{A^2}\in\mathbb{N}$.

Corrigé : 1) Montrons que $A=\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

On a : $A=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right)\left(\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\right)}$

$$A=\frac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{3}^2}=\frac{1+2+3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{3}^2}=\frac{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{1^2+2\sqrt{2}\times1+\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{3}^2}$$

$$A=\frac{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

2) Montrons que : $\dfrac{(A-1)^2}{A}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

$$\frac{(A-1)^2}{A}=\frac{\left(\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-1\right)^2}{\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}}=\frac{\left(\dfrac{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)^2}{\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}}$$

C'est-à-dire : $\dfrac{(A-1)^2}{A}=\dfrac{6\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

3) Déduction que : $\dfrac{(A-1)^4}{A^2}\in\mathbb{N}$.

$$\frac{(A-1)^4}{A^2}=\left(\frac{(A-1)^2}{A}\right)^2=\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2=18\in\mathbb{N}$$

Exercice02 : $3\,pts(0.5\,pts\ \times6)$

Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$:

$B=4x^2-20x+25$; $C=7x^2-2$; $D=\left(4x^2-100\right)\left(x-3\right)-\left(2x+10\right)\left(2x+1\right)$; $E=4x^8-12x^4+9$

$F=25a^2+b^2-x^2-10ab$; $G=y^2-y-9x^2+3x$

Corrigé : $B=4x^2+20x+25$ est du type : $a^2+2ab+b^2$

$B=(2x)^2+2\times 2x\times 5+5^2=(2x+5)^2$

$C=7x^2-2$ est du type : a^2-b^2

$C=\left(\sqrt{7}x\right)^2-\sqrt{2}^2=\left(\sqrt{7}x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}x+\sqrt{2}\right)$

$D=(4x^2-100)(x-3)-(2x+10)(2x+1)=\left((2x)^2-10^2\right)(x-3)-(2x+10)(2x+1)$

$D=(2x-10)(2x+10)(x-3)-(2x+10)(2x+1)$ On a : $2x+10$ facteur commun

Donc : $D=(2x+10)\left[(2x-10)(x-3)-(2x+1)\right]=(2x+10)(2x^2-6x-10x+30-2x-1)$

$D=(2x+10)(2x^2-18x+29)$

$E=4x^8-12x^4+9=\left(2x^4\right)^2-2\times 2x^4\times 3+3^2$ est du type : $a^2-2ab+b^2$

Donc : $E=\left(2x^4-3\right)^2$

$F=25a^2+b^2-x^2-10ab$

$F=\left(25a^2-10ab+b^2\right)-x^2$

$F=\left((5a)^2-2\times 5a\times b+b^2\right)-x^2=(5a-b)^2-x^2=(5a-b-x)(5a-b+x)$

$G=y^2-y-9x^2+3x$

$M=y^2-y-9x^2+3x=y^2-9x^2-(y-3x)$

$G=(y-3x)(y+3x)-(y-3x)\times 1$

Donc : $G=(y-3x)(y+3x-1)$.

Exercice03 : $3\,pts(1pts+2pts)$

Soient : x et y deux réels tels que : $x<y<3$

1) Montrer que : $x+y-6\prec 0$

2) Comparer $a=x^2-6x+1$ et $b=y^2-6y+1$

Corrigé :1) On a : $x<y<3$ donc $x<3$ et $y<3$

Donc **:** $x+y<6$ Equivaut à : $x+y-6<0$

2) $a-b=(x^2-6x+1)-(y^2-6y+1)$

$a-b=x^2-6x+1-y^2+6y-1=x^2-y^2-6x+6y$

$a-b=(x-y)(x+y)-6(x-y)=(x-y)(x+y-6)$

On a : $x<y$ donc $x-y\in\mathbb{R}^-$ et on a : $x+y-6\in\mathbb{R}^-$

Donc : $(x-y)(x+y-6)\in\mathbb{R}^+$ Alors : $a-b\in\mathbb{R}^+$ et par suite $a\geq b$

Exercice04 : $3\,pts(1pts+1pts+1pts)$

Soient x et y deux réels tels que : $\left|2x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$ et $\left|y-\frac{3}{4}\right|<\frac{1}{4}$

1) Montrer que : x et y appartiennent à l'intervalle : $\left]\frac{1}{2};1\right[$

2) a) Vérifier que : $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

b) En déduire que : $-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}$

Corrigé :1) a) $\left|2x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$ Signifie que : $-\frac{1}{2}<2x-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$

Signifie que : $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}<2x<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ Signifie que : $1<2x<2$

Signifie que : $1\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<2\times\frac{1}{2}$ Signifie que : $1\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<2\times\frac{1}{2}$

Signifie que : $\frac{1}{2}<x<1$ Signifie que : $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

b) $\left|y-\frac{3}{4}\right|<\frac{1}{4}$ Signifie que : $-\frac{1}{4}<y-\frac{3}{4}<\frac{1}{4}$

Signifie que : $-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}<y-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}<\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

Signifie que : $\frac{1}{2}<y<1$

Signifie que : $y\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

2) a) Vérifions que : $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

$xy-3x-2y-1=xy-2y-3x-1=(x-2)y-3x+6-6-1$

$xy-3x-2y-1=(x-2)y-3(x-2)-7$

$xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

Remarque : la méthode la plus simple est de développer : $(x-2)(y-3)-7$

Est de trouver : $xy-3x-2y-1$

b) Déduisons que : $-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}$

On a : $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

Et on a : $\frac{1}{2}<x<1$ et $\frac{1}{2}<y<1$ donc : $\frac{1}{2}-2<x-2<1-2$ et $\frac{1}{2}-3<y-3<1-3$

Donc : $-\frac{3}{2}<x-2<-1$ et $-\frac{5}{2}<y-3<-2$ Alors : $1<-(x-2)<\frac{3}{2}$ et $2<-(y-3)<\frac{5}{2}$

Donc : $1\times2<\left(-(x-2)\right)\times\left(-(y-3)\right)<\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}$

Donc : $2<(x-2)(y-3)<\frac{15}{4}$ Alors : $\boxed{-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}}$

Exercice05 : $4pts(1,5pts+1,5pts+1pts)$ Soient $ABCD$ un carré tel que : $AB=a$ avec $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et ABE et BCF deux triangles équilatérales (voir figure ci-contre)

1) Exprimer les vecteurs : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2) En déduire les coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

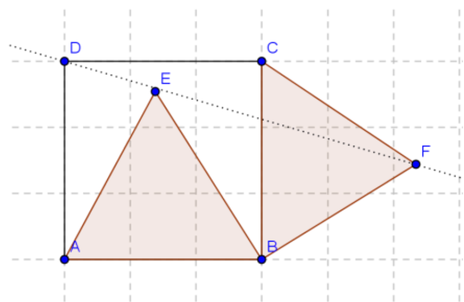
2) Montrer que les points : D ; E ; F sont alignés.

Solution :1) Soit I Le milieu de $[AB]$ et Puisque ABE est un triangle équilatéral alors :

$AE^2=AI^2+IE^2$ Donc : $a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+IE^2$.

Donc : $IE^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$.

Donc : $IE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ par suite : $\overrightarrow{IE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$



Or on a : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE}$ par suite on a : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$.

Soit J Le milieu de $[BC]$

De la même façon on trouve que : $JF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\overrightarrow{JF}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$ Or on a : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JF}$

Par suite on a : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AF}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2) Déduction des coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

On a $A(0;0)$ et $A(1;0)$

On a aussi : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ donc : $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

On a aussi : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ donc : $E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On a aussi : $\overrightarrow{AF}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc : $F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

3) Montrons que les points : D ; E ; F sont alignés.

On a : $\overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$ et $\overrightarrow{DF}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DF}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}-1\right)=0$$

Les points : D ; E ; F sont alignés.

Exercice06 : (****) $4\,pts(1pts+1pts+1pts+1\,pts)$ Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points suivants : $A(-2;1)$; $B(2;4)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;2)$

2) On associe à chaque nombre réel m la droite $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$

Et soit (D') la droite définie par l'équation cartésienne suivante : $(D'):-\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0$

a) Donner la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle a (D')

b) Donner la valeur de m pour que B soit un point de (D_m)

c) Montrer que tous les droites (D_m) passent par un point fixe E, dont vous déterminez les coordonnées.

Solution :1) On cherche une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;2)$

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(D)$

$M(x;y)\in(D)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+2;y-1)$ et $\vec{u}(5;2)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $2(x+2)-5(y-1)=0$

Équivaut à : $2x+4-5y+5=0$ Équivaut à : $2x-5y+9=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (D) est : $(D):2x-5y+9=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : $(D)\ ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(5;2)$

Donc : $a=2$ et $b=-5$ alors l'équation devient : (D) $2x-5y+c=0$

Or on sait que $A(-2;1)$ et $A\in(\Delta)$

Donc : $2\times(-2)-5\times1+c=0$ c'est-à-dire : $-4-5+c=0$ donc : $c=9$

Par suite : $(\Delta):2x-5y+9=0$

2) On a : $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$ et $(D'):-\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0$

a) Déterminons la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle à (D')

Soit : $m\in\mathbb{R}$ on a : $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$ et $(D'):-\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0$

Donc : $\vec{u}_m(2m\,;m-1)$ est vecteur directeur de (D_m) et $\vec{v}\left(-1\,;-\frac{2}{3}\right)$ est vecteur directeur de (D')

(D_m) est parallèle à (D') signifie $\vec{u}_m(2m\,;m-1)$ et $\vec{v}\left(-1\,;-\frac{2}{3}\right)$ sont colinéaires

Signifie $\det\left(\vec{u}_m;\vec{v}\right)=0$ Equivaut à : $\begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m-1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=0$

Equivaut à : $-\frac{2}{3}\times2m-(-1)(m-1)=0$ Equivaut à : $-\frac{4}{3}m+m-1=0$ Equivaut à : $-\frac{m}{3}-1=0$

Equivaut à : $\frac{-m-3}{3}=0$ c'est-à-dire : $\boxed{m=-3}$

Pour que (D_m) est parallèle à (D')) il faut que $m=-3$

b) On cherche la valeur de m pour que : $B\in(D_m)$

Soit : $m\in\mathbb{R}$ on a : $B(2;4)\in(D_m)$ Equivaut à : $(m-1)\times2-2m\times4+3=0$

Equivaut à : $2m-2-8m+3=0$

Equivaut à : $-6m+1=0$ c'est-à-dire : $\boxed{m=\frac{1}{6}}$; Pour que $B\in(D_m)$ il faut que $m=\frac{1}{6}$

c) Montrons que tous les droites (D_m) passent par un point fixe E

Soit : $m\in\mathbb{R}$; $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$

$E(x_E;y_E)\in(D_m)$ signifie : $(m-1)x_E-2my_E+3=0$

Equivaut à : $mx_E-x_E-2my_E+3=0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

Equivaut à : $m(x_E-2y_E)+3-x_E=0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

Cela Signifie que : $x_E-2y_E=0$ et $3-x_E=0$

Cela Signifie que : $3-2y_E=0$ et $x_E=3$

Cela Signifie que : $y_E=\frac{3}{2}$ et $x_E=3$

Donc toutes les droites (D_m) passent par un point fixe : $E\left(3\,;\frac{3}{2}\right)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien