Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir Maison n°2 :D sur les leçons suivantes :

- **L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles**
- **L'ordre dans $\mathbb{R}$**
- **La droite dans le plan**

Exercice01 : $(2\ pts)$

Soient $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}^*$ et $c\in\mathbb{R}^*$ tels que : $ab+bc+ca=0$

Calculer : $B=\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}$

Corrigé : $B=\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=\frac{ab(a+b)}{abc}+\frac{ac(a+c)}{abc}+\frac{bc(b+c)}{abc}$

$$B=\frac{a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2}{abc}$$

$$B=\frac{(a^2b+a^2)c+(ab^2+b^2c)+(ac^2+bc^2)}{abc}$$

$$B=\frac{a(ab+ac)+b(ab+bc)+c(ac+bc)}{abc}$$

Or on a : $ab+bc+ca=0$ donc $ab+ca=-bc$ et $ab+bc=-ca$ et $ac+bc=-ab$

Donc : $B=\frac{a(-bc)+b(-ca)+c(-ab)}{abc}=\frac{-abc-abc-abc}{abc}=\frac{-3abc}{abc}=-3$

Exercice02 : $3,5\ pts(0,5\,pts\times5)$

Effectuer et Calculer et simplifier **(**Sans calculatrice) **:**

$A=(3+\sqrt{11})^2-(3-\sqrt{11})^2$ $\quad B=(4\sqrt{3}-7)^{2015}\times(4\sqrt{3}+7)^{2015}$

$C=\frac{3\times10^{-5}\times7,2\times10^7}{2\times15^3}$ $\quad D=\frac{(-2)^3\times(4^2)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

Corrigé : $A=(\sqrt{3}+\sqrt{11})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{11})^2=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{11}+(\sqrt{11})^2-((\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{11}+(\sqrt{11})^2)$

$$A=3+2\sqrt{33}+11-(3-2\sqrt{33}+11)=3+2\sqrt{33}+11-3+2\sqrt{33}-11=4\sqrt{33}$$

$$B=((4\sqrt{3}-7)(4\sqrt{3}+7))^{2015}=((4\sqrt{3})^2-(7)^2)^{2015}=(48-49)^{2015}=(-1)^{2015}=-1$$

$$C=\frac{3\times10^{-5}\times7,2\times10^7}{2\times15^3}=\frac{3\times10^{-5}\times3^2\times2^3\times10^{-1}\times10^7}{2\times(3\times5)^3}=\frac{3\times3^2\times2^3\times10}{2\times3^3\times5^3}=\frac{3\times3^2\times2^3\times2\times5}{2\times3^3\times5^3}=\frac{2^3}{5^2}=\frac{8}{25}$$

$$D=\frac{(-2)^3\times(4^2)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}=\frac{-2^3\times4^{2\times(-1)}\times2^3}{1024\times(-2^3)^{-4}}=\frac{-2^3\times(2^2)^{-2}\times2^3}{2^{10}\times(-2^3)^{-4}}$$

$$D=-2^3\times(2^2)^{-2}\times2^3\times2^{-10}\times(-2)^{3\times4}=-2^{3-4+3-10+12}=-2^4=-16$$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

On pose : $x=200520052006$ donc : $200520052007=x+1$ et $200520052005=x-1$

Donc : $F=x^2-(x-1)(x+1)=x^2-x^2+1=1$

Exercice03 : $4pts(1pts+1pts+1pts+1pts)$

Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$E=2x^2-2\sqrt{6}x+3$; $F=(7x-1)(3x-5)+25x-9x^3$; $G=x^6+x^4-2x^2-2$; $H=x^4-36$

Corrigé : $E=2x^2-2\sqrt{6}x+3$ est du type : $a^2-2ab+b^2$

$$E=\left(\sqrt{2}x\right)^2-2\times\sqrt{2}x\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=\left(\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right)^2$$

$$F=(7x-1)(3x-5)+25x-9x^3$$

$$F=(7x-1)(3x-5)-x\left(9x^2-25\right)=(7x-1)(3x-5)-x\left((3x)^2-5^2\right)$$

mais $(3x)^2-5^2$ est du type : a^2-b^2

Donc : $F=(7x-1)(3x-5)-x(3x-5)(3x+5)$ On a : $3x-5$ facteur commun

Donc : $F=(3x-5)\left[(7x-1)-x(3x+5)\right]=(3x-5)\left(7x-1-3x^2-5x\right)=(3x-5)\left(-3x^2+2x-1\right)$

$$G=x^6+x^4-2x^2-2$$

$$G=\left(x^6+x^4\right)-2\left(x^2+1\right)$$

$$G=x^4\left(x^2+1\right)-2\left(x^2+1\right)$$

$G=x^4\left(x^2+1\right)-2\left(x^2+1\right)$ On a : x^2+1 facteur commun

$G=\left(x^2+1\right)\left(x^4-2\right)$ on peut aussi continuer la factorisation

$$G=\left(x^2+1\right)\left(\left(x^2\right)^2-\sqrt{2}^2\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2-\sqrt{\sqrt{2}}^2\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)$$

$$G=\left(x^2+1\right)\left(x-\sqrt{\sqrt{2}}\right)\left(x+\sqrt{\sqrt{2}}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)$$

$$H=x^4-36=x^4-\left(\sqrt{6}\right)^4=\left(x^2\right)^2-\left(\sqrt{6}^2\right)^2$$

$$H=\left(x^2-\sqrt{6}^2\right)\left(x^2+\sqrt{6}^2\right)=\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x^2+6\right)$$

Exercice04 : $3pts(2pts+1pts)$ On pose : $A=\sqrt{\left(52-6\sqrt{43}\right)^3}$ et $B=\sqrt{\left(52+6\sqrt{43}\right)^3}$

1) Montrer que : $A=\left(\sqrt{43}-3\right)^3$ et $B=\left(\sqrt{43}+3\right)^3$

2) En déduire que : $A-B\in\mathbb{Z}$.

Corrigé : 1) Montrons que $A=\left(\sqrt{43}-3\right)^3$

$$A=\sqrt{\left(52-6\sqrt{43}\right)^3}=\sqrt{\left(43-2\times3\sqrt{43}+9\right)^3}=\sqrt{\left(\sqrt{43}^2-2\times3\sqrt{43}+3^2\right)^3}$$

$A=\sqrt{\left(\left(\sqrt{43}-3\right)^2\right)^3}=\sqrt{\left(\left(\sqrt{43}-3\right)^2\right)^3}=\left|\sqrt{43}-3\right|^3=\left(\sqrt{43}-3\right)^3$ en effet : $\left|\sqrt{43}-3\right|=\sqrt{43}-3$ car $\sqrt{43}>3$

$$B=\sqrt{\left(52+6\sqrt{43}\right)^3}=\sqrt{\left(43+2\times3\sqrt{43}+9\right)^3}=\sqrt{\left(\sqrt{43}^2+2\times3\sqrt{43}+3^2\right)^3}$$

$$B=\sqrt{\left(\left(\sqrt{43}+3\right)^2\right)^3}=\sqrt{\left(\left(\sqrt{43}+3\right)^2\right)^3}=\left|\sqrt{43}+3\right|^3=\left(\sqrt{43}+3\right)^3$$

2) $A-B=\left(\sqrt{43}-3\right)^3-\left(\sqrt{43}+3\right)^3$ mais on a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Donc : $A-B=\left(\sqrt{43}-3-\sqrt{43}-3\right)\left(\left(\sqrt{43}-3\right)^2+\left(\sqrt{43}-3\right)\left(\sqrt{43}+3\right)+\left(\sqrt{43}+3\right)^2\right)$

Donc : $A-B=-6\left(43-6\sqrt{43}+9+43-9+43+6\sqrt{43}+9\right)$

Donc : $A-B=-6\times138=-828\in\mathbb{Z}$

Exercice05 : $3,5\,pts(1,5\,pts+1\,pts+1\,pts)$

Soient a et b deux réels tel que : $a\in[0;2]$ et $b\in[0;2]$

1) Montrer que : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

2) Sachant que : $0.866\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le0.867$ et $0.707\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le0.708$

Donner une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut et excès à 2×10^{-3} près

3) En déduire que : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le1,2\times10^{-1}$

Corrigé : 1) $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3(2+b)-3(2+a)}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\frac{|3||b-a|}{|(2+b)(2+a)|}=\frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|}$ Car : $|b-a|=|a-b|$

Or on a : $a\in[0;2]$ signifie $0\le a\le2$

Et on a : $b\in[0;2]$ signifie $0\le b\le2$

Donc : $2\le2+a\le4$ et $2\le2+b\le4$ Par suite : $4\le(2+b)(2+a)\le16$

C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)|=(2+b)(2+a)$ et on a aussi : $\frac{1}{16}\le\frac{1}{(2+b)(2+a)}\le\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3|a-b|}{16}\le\frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)}\le\frac{3|a-b|}{4}$ car : $3|a-b|\ge0$

Par suite : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

2) On a : $0.866\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le0.867$ et $0.707\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le0.708$

On a $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et on a : $-0.708\le-\frac{\sqrt{2}}{2}\le-0.707$

Donc : $0.866-0.708\le\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le0.867-0.707$

Donc : $0.158\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le0.16$ et $0.16-0.158=2\times10^{-3}$

Par suite : $0,16$ est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par excès à : 2×10^{-3} près

$0,158$: Est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut à : 2×10^{-3} près

3) D'après 1) on a $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le\frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$ et on a : $0.158\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le0.16$

Donc : $0\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le0.16$ Par suite : $\frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\le\frac{3}{4}\times0.16=0.12$ Finalement :

$\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le0.12$ C'est-à-dire : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le1,2\times10^{-1}$

Exercice06: (****) $4\,pts(1\,pts+0,5\,pts+1\,pts+1,5\,pts)$

On associe à chaque nombre réel m la droite $(D_m): x+my+m-3=0$

1) Donner une équation cartésienne de la droite (D') Qui passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a $(D_1): x+y-2=0$

2) Donner une représentation paramétrique de la droite $(D_1): x+y-2=0$

3) Démontrer que toutes les droites (D_m) passent par un point fixe $F(x_F;y_F)$ dont on déterminera les coordonnées

4) Déterminer la valeur de m dans les cas suivants :

a) (D_m) passe par le point $A(-4;2)$

b) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées

c) $(D_m)\parallel(\Delta)$ telle que : $(\Delta): 3x-4y+6=0$

Solution : 1) $\vec{u}(-b;a)=\vec{u}(-1;1)$ est un vecteur directeur de $(D_1): x+y-2=0$

(D') passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a $(D_1): x+y-2=0$

Donc : $\vec{u}(-1;1)$ est aussi un vecteur directeur de (D') :

Et on sait que : $\vec{u}(-b;a)$ donc : $a=1$ et $b=1$ par suite $(D'): x+y+c=0$

Et on sait que (D') passe par $B(1;0)$ donc : $1+0+c=0$ on trouve : $c=-1$

Donc : $(D'): x+y-1=0$

2)Un vecteur directeur de $(D_1): x+y-2=0$ est $\vec{u}(-b;a)=\vec{u}(-1;1)$

Déterminons un point de (D_1) ?

Si $x=0$ alors : $0+y-2=0$ donc $y=2$

Donc : $C(0,2)$

Donc : une représentation paramétrique de la droites (D_1) est : $\begin{cases} x = 0 + (-1)t \\ y = 2 + 1t \end{cases}$

C'est-à-dire : $(D_1) : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

3) $m \in \mathbb{R}$ $\quad (D_m) : x + my + m - 3 = 0$

$F(x_F ; y_F) \in (D_m)$ Pour tout $m \in \mathbb{R}$ signifie : $x_F + my_F + m - 3 = 0$

Equivaut à : $x_F - 3 + m(y_F + 1) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

Cela Signifie que : $x_F - 3 = 0$ et $y_F + 1 = 0$ c'est-à-dire : $x_F = 3$ et $y_F = -1$

Donc quel que soit $m \in \mathbb{R}$ on a $F(3;-1) \in (D_m)$

4)a) (D_m) passe par le point $A(4;3)$ Cela Signifie que : $-4 + 2m + m - 3 = 0$

Equivaut à : $3m - 7 = 0$ c'est-à-dire : $\boxed{m = \frac{7}{3}}$

b) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées signifie : $x = a$

Cela Signifie que : $\boxed{m = 0}$

c)le vecteur directeur de (D_m) est : $\vec{u}_m(-m;1)$ et le vecteur directeur de (Δ) est : $\vec{v}(4;3)$

$(D_m) \parallel (\Delta)$ Cela Signifie que : $\det(\vec{u}_m ; \vec{v}) = 0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} -m & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Equivaut à : $-3m - 4 = 0$ c'est-à-dire : $\boxed{m = -\frac{4}{3}}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien