Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir Maison n°2 : E sur les leçons suivantes :

- **L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles**
- **L'ordre dans $\mathbb{R}$**
- **La droite dans le plan**

Exercice01 : $(1,5\ pts)$ Les nombres $\frac{54}{40}, \frac{126}{450}, \frac{75}{90}, \frac{17}{7}, \frac{1}{3}$

Sont-ils des décimaux ?

Corrigé : $\frac{54}{40} = 1.35 = \frac{135}{10^2} \in \mathbb{D}$; $\frac{126}{450} = 0.28 = \frac{28}{10^2} \in \mathbb{D}$

$\frac{75}{90} = \frac{5}{6} = 0.8333333333... \notin \mathbb{D}$

$\frac{17}{7} = 0.428571429... \notin \mathbb{D}$; $\frac{1}{3} = 0.333333.......$ est rationnel mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Remarque : Un rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie :
2.428571428571428571428571428571428571… ; 428571 se répète.

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ont dit que : $\sqrt{2}$ est un irrationnel

Un irrationnel a une écriture décimale non périodique infinie :
Exemple : 1.4142135623730950488016887242…

Exercice02 : $2,5\ pts(1pts + 1,5pts)$ $n \in \mathbb{N}^*$

1) Déterminer les nombres a et b tels que : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

2) En déduire la valeur du nombre : $A = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + ... + \frac{1}{2020\times 2021}$

Corrigé : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

Équivaux a : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}$

Équivaux a : $a(n+1)+bn = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Pour : n=1 on a : $2a+b=1$ Pour : n=2 on a : $3a+2b=1$

On va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2a+b=1 & (1) \\ 3a+2b=1 & (2) \end{cases}$

Par exemple Par la Méthode de substitution :On exprime *b* en fonction de *a* dans la première équation et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} b=1-2a \\ 3a+2b=1 \end{cases}$ On remplace ensuite *b* par $1-2a$ dans La seconde équation, ce qui donne le système : $\begin{cases} b=1-2a \\ 3a+2(1-2a)=1 \end{cases}$ Qui équivaut à $\begin{cases} b=1-2a \\ -a+2=1 \end{cases}$

Soit encore à $\begin{cases} b=1-2a \\ a=1 \end{cases}$ et on remplace a par 1 dans la première équation on trouve $\begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

Par suite : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) D'après la question précédente on a : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Donc : $n=1:\ \frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$

$n=2:\ \frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$n=3:\ \frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

Ainsi de suite…

$n=2020:\ \frac{1}{2020\times2021}=\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}$

Donc : $A=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\ldots+\frac{1}{2020\times2021}$ $\quad =1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}$

En simplifiant avec les nombres opposés on trouve : $A=1-\frac{1}{2021}=\frac{2021-1}{2021}=\frac{2020}{2021}$

Exercice03 : $2,5\ pts$ Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$H=x^3+1+2\left(x^2-1\right)-\left(x+1\right)$; $L=4x^2-4x\sqrt{5}+5+\left(1-2x\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)$; $S=ax+ay-bx-by$;

$U=a^2-a-x^2+x$; $V=a^4+b^4-x^4-2a^2b^2+4abx^2$

Corrigé :

$H=x^3+1+2\left(x^2-1\right)-\left(x+1\right)=x^3+1^3+2\left(x^2-1^2\right)-\left(x+1\right)$ Car : $a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab-b^2\right)$

$H=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1^2\right)+2\left(x+1\right)\left(x-1\right)-\left(x+1\right)$

$H=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1+2\left(x-1\right)-1\right)=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1+2x-2-1\right)$

$H=\left(x+1\right)\left(x^2+x-2\right)$

$L=4x^2-4x\sqrt{5}+5+\left(1-2x\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)$

$L=\left(2x\right)^2-2\times2x\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(1-2x\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)$

$L=\left(2x-\sqrt{5}\right)^2+\left(1-2x\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)=\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(2x-\sqrt{5}+1-2x\right)$ C'est-à-dire : $L=\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)$

$S=ax+ay-bx-by=a\left(x+y\right)-b\left(x+y\right)=\left(x+y\right)\left(a-b\right)$

$U=a^2-a-x^2+x=a^2-x^2-\left(a-x\right)$

$U=\left(a-x\right)\left(a+x\right)-\left(a-x\right)\times1$ Donc : $U=\left(a-x\right)\left(a+x-1\right)$.

$V=a^4+b^4-x^4-2a^2b^2+4abx^2$

$V=\left(a^4+2a^2b^2+b^4\right)-\left(x^4-4abx^2+4a^2b^2\right)$

$V=\left(a^2+b^2\right)^2-\left(x^2-2ab\right)^2=\left(a^2+b^2+x^2-2ab\right)\left(a^2+b^2-x^2+2ab\right)$

Exercice04 : $(1,5\ pts)$

Montrer que : $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\in\mathbb{N}$

Corrigé : 1) Montrons que $A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\in\mathbb{N}$

$A=\left[\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{7}\right)\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)-\sqrt{7}\right)\right]\left(\sqrt{7}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\right)\left(\sqrt{7}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\right)$

$A=\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2-\sqrt{7}^2\right)\left(\sqrt{7}^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2\right)$

$A=\left(\left(\sqrt{5}\right)^2+2\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right)+\sqrt{6}^2-\sqrt{7}^2\right)\left(\sqrt{7}^2-\left(\sqrt{5}\right)^2+2\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right)-\sqrt{6}^2\right)$

$A=\left(5+2\sqrt{30}+6-7\right)\left(7-5+2\left(\sqrt{30}\right)-6\right)$

$A=\left(4+2\sqrt{30}\right)\left(-4+2\left(\sqrt{30}\right)\right)=\left(2\sqrt{30}+4\right)\left(2\sqrt{30}-4\right)=\left(2\sqrt{30}\right)^2-4^2=120-16=104\in\mathbb{N}$

Exercice05 : $3,5\,pts(0,5\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts)$

1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ on a : $\frac{4}{2-x}=2+x+\frac{x^2}{2-x}$

b) En déduire que : si $|x|\le 1$ alors $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right|\le x^2$

2) Donner une valeur approchée du nombre : $\frac{4}{0,999}$ à 10^{-6} près

Corrigé : 1) a) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{2\}$; $2+x+\frac{x^2}{2-x}=\frac{(2+x)(2-x)+x^2}{2-x}=\frac{2^2-x^2+x^2}{2-x}=\frac{4}{2-x}$

b) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ tel que : $|x|\le 1$

On a : $\frac{4}{2-x}=2+x+\frac{x^2}{2-x}$

Donc : $\frac{4}{2-x}-(2+x)=\frac{x^2}{2-x}$

Donc : $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right|=\left|\frac{x^2}{2-x}\right|$

C'est-à-dire : $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right|=\frac{x^2}{|2-x|}\ (1)$ Car : $x^2\ge 0$

On a : $|x|\le 1$ Donc : $-1\le x\le 1$ c'est-à-dire : $-1\le -x\le 1$

Donc : $2-1\le 2-x\le 1+2$ c'est-à-dire $1\le 2-x\le 3$ et par suite : $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-x}\le 1$ donc :

$-1\le\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-x}\le 1$

Par suite : $\frac{1}{|2-x|}\le 1$ et puisque : $x^2\ge 0$ alors : $\frac{x^2}{|2-x|}\le x^2$ et d'après l'égalité (1)

On a donc : $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right|\le x^2$

2) Déterminons une valeur approchée du nombre : $\frac{1}{0,99}$ à 2×10^{-4} près ???

D'après 1) b) on donne à x la valeur : $x=10^{-3}$ et puisque $\left|10^{-2}\right|\le 1$

Alors : $\left|\frac{4}{2-10^{-3}}-\left(2+10^{-3}\right)\right|\le\left(10^{-3}\right)^2$

C'est-à-dire on a : $\left|\frac{4}{1-0,001}-(2+0,001)\right|\le 10^{-6}$

Donc : $\left|\frac{4}{0,999}-2,001\right|\le 10^{-6}$ et par suite : $2,001$ est une valeur approchée du nombre : $\frac{4}{0,999}$ à 10^{-6} près

Exercice06 : $4,5\,pts(1,5\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts)$

Soient a et b deux réels tels que : $\left|\frac{3a-11}{a-2}\right|<2$ et $\left|\frac{2b-3}{b+1}-5\right|<2$

1) Montrer que : $3<a<7$ et $-6<b<-2$

2) Encadrer les nombres : $a+b+1$ et ab

3) En déduire une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

Corrigé : 1) a) Montrons que : $3<a<7$

On a : $\left|\frac{3a-11}{a-2}\right|<2$ donc : $-2<\frac{3a-11}{a-2}<2$

Donc : $-2<\frac{3a-6+6-11}{a-2}<2$

Donc : $-2<\frac{3(a-2)-5}{a-2}<2$ c'est-à-dire : $-2<\frac{3(a-2)}{a-2}-\frac{5}{a-2}<2$

Donc : $-2<3-\frac{5}{a-2}<2$ c'est-à-dire : $-2-3<-\frac{5}{a-2}<2-3$

Donc : $-5<-\frac{5}{a-2}<-1$ c'est-à-dire : $1<\frac{5}{a-2}<5$

Donc : $\frac{1}{5}<\frac{a-2}{5}<1$ c'est-à-dire : $1<a-2<5$

Donc : $\boxed{3<a<7}$

b) Montrons que : $-6<b<-2$

On a : $\left|\frac{2b-3}{b+1}-5\right|<2$ donc : $-2<\frac{2b-3}{b+1}-5<2$

Donc : $-2<\frac{2(b+1)-2-3}{b+1}-5<2$

Donc : $-2<\frac{2(b+1)}{b+1}-\frac{5}{b+1}-5<2$ c'est-à-dire : $-2<2-\frac{5}{b+1}-5<2$

Donc : $-2<-\frac{5}{b+1}-3<2$ c'est-à-dire : $1<-\frac{5}{b+1}<5$

Donc : $\frac{1}{5}<-\frac{b+1}{5}<1$ c'est-à-dire : $-1<\frac{b+1}{5}<-\frac{1}{5}$

Donc : $-5<b+1<-1$ c'est-à-dire : $\boxed{-6<b<-2}$

2) a) Encadrement du nombre : $a+b+1$

On a : $3<a<7$ et $-6<b<-2$

Donc : $3+(-6)<a+b<7+(-2)$

Donc : $-3<a+b<5$

Donc : $-3+1<a+b+1<5+1$

Donc : $\boxed{-2<a+b+1<6}$

b) Encadrement du nombre : ab

On a : $3<a<7$ et $-6<b<-2$

Donc : $3<a<7$ et $2<-b<6$

Donc : $6<-ab<42$

Donc : $\boxed{-42<ab<-6}$

3) Déduirons une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

On a : $3<a<7$ donc $6<2a<14$ et $-6<b<-2$

$0<2a+b<12$

Donc : $2a+b$ est positif et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$ est positif aussi
On va comparer leurs carrés :

$$(2a+b)^2-\sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2=4a^2+4ab+b^2-2a^2-b^2-3ab=2a^2+ab=a(2a+b)$$

Or : $2a+b$ est positif et a est positif donc $a(2a+b)>0$

Par suite : $(2a+b)^2-\sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2>0$

Alors : $\boxed{2a+b>\sqrt{2a^2+b^2+3ab}}$

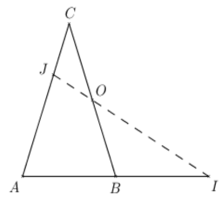
Exercice07 : $4\,pts(1,5\,pts+1,5\,pts+1\,pts)$

À partir du triangle ABC on construit les points I ; J tel que : $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1) Déterminer les coordonnées des points : A ; B ; C ; I ; J dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IJ)

3) Démontrer que la droite (IJ) passe par le milieu O du segment $[BC]$



Solution : 1) En considérant le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ on a $A(0;0)$

On a $\overrightarrow{AB}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$ donc $B(1;0)$ et on a $\overrightarrow{AC}=0\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}$ donc $C(0;1)$

On a : $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$ donc : $I(2;0)$ dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

On a : $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=0\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc : $J\left(0;\frac{2}{3}\right)$ dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

2) (IJ) : $ax+by+c=0$: On a : $\overrightarrow{IJ}\left(-2;\frac{2}{3}\right)$ un vecteur directeur de (IJ) est $\overrightarrow{IJ}(-b;a)$

Donc : $a=\frac{2}{3}$ et $b=2$; par suite l'équation devient (IJ) : $\frac{2}{3}x+2y+c=0$.

Or on sait que : $I(2;0)\in(IJ)$ donc : $\frac{2}{3}\times(2)+2\times0+c=0$ c'est-à-dire : $c=-\frac{4}{3}$

Par suite (IJ): $\frac{2}{3}x+2y-\frac{4}{3}=0$ On multiplie cette équation par : 3 on trouve (IJ): $2x+6y-4=0$

3) Démontrons que la droite (IJ) passe par le milieu O du segment $[BC]$

Le milieu O du segment $[BC]$ est $O\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ et on a : $B(1;0)$ et $C(0;1)$

Donc : $O\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ c'est-à-dire : $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Regardons si les coordonnées du point $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ vérifient l'équation de la droite (IJ)

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}+1-\frac{4}{3}=-1+1=0$$

Donc : $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ vérifient l'équation de la droite (IJ)

Pa suite : droite (IJ) passe par le milieu O du segment $[BC]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien