Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : A

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (2pts)

Déterminer les chiffre x et **y** pour que le nombre **12x5y** Soit divisible par 9 et 3

Corrigé : 1) Le nombre **12x5y** est divisible par 9 et 3 si et seulement s'il est divisible par 9

12x5y Soit divisible par 9 et 3si la somme de ces chiffres est divisible par 9

C'est-à-dire : 1 + 2+ x +5+ **y** = 8 + x + **y** ***est divisible par 9***

Et x et **y** ∈ {**0**; **1**; **2**; **3**; **4**; **5**; **6**; **7**; **8**; **9**}

Exercice02 : (3pts)

On pose : $A=41\times 2^{n}+2^{n+2}$ ***et*** $B=60$ tel que $n\in\mathbb{N}$

1) Donner une décomposition en produit de facteurs premiers pour le nombre B (0.5pts)

2) Quel est le plus petit entier naturel m pour que $m\times B$ soit un carré parfait. (0.5pts)

3) Donner une décomposition en produit de facteurs premiers pour le nombre A en fonction de $\boldsymbol{n}$. (1pts)

4) Déterminer $PGCD(A;B)$ ***et*** $PPCM(A;B)$ .en fonction de $\boldsymbol{n}$. (1pts)

Corrigé : 1) $B=60=2^{2}\times 3\times 5$

2) $m\times B$ ***un carré parfait alors*** $\sqrt{m\times B}$ ***est un entier naturel***

Donc le plus petit entier naturel m pour que $m\times B$ soit un carré parfait est $3\times 5=15$

3) $A=41\times 2^{n}+2^{n+2}=2^{n}\left(41+2^{2}\right)=45\times 2^{n}=2^{n}\times 3^{2}\times 5$

4) Si $n=0$ alors : $A=3^{2}\times 5$ et donc : $PGCD(A;B)=3\times 5=15$

Si $n=1$ alors : $PGCD(A;B)=2^{1}\times 3\times 5=30$

Si $n\geq 2$ alors : $PGCD(A;B)=2^{2}\times 3\times 5=60$

Si $n\leq 2$ alors : $PPCM(A;B)=2^{2}\times 3^{2}\times 5=60$

Si $n>2$ alors : $PPCM(A;B)=2^{n}\times 3^{2}\times 5=45\times 2^{n}$

Exercice03 : (2pts)

Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse.

332787 ; 607 ; 331004001 ; 997

Corrigé : 1) 332787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 30 qui est multiple de 3 donc 3 divise 332787

2) Est ce que 607 est premier ? On utilise la règle :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^{2}\leq 607$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et aucun ne divise 607.

Donc 607 est premier

3) 331004001 n'est pas premier car la somme des chiffres est 12 un multiple de 3 donc 3 divise 331004001

4) Est ce que 997 est premier ? On utilise la règle :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^{2}\leq 997$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 et aucun ne divise 997.

Donc 997est premier

Exercice04 : (4pts) $n\in\mathbb{N}$

1)Déterminer la parité du nombre : $n^{2}+n+3$ (1pts)

2) a) Vérifier que : $n^{3}+3n^{2}+2n=n(n+1)(n+2)$ (1pts)

b) Montrer que : $n^{3}+3n^{2}+2n$ est un multiple de 3 si $n\in\mathbb{N}$ (2pts)

Indication : Etudier les cas : $n=3k$; $n=3k+1$ et $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

Corrigé : 1) $n^2+n+3=n(n+1)+3$

Or $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc c'est un nombre pair et 3 est impair

Donc : n^2+n+3 est un nombre impair

2) a) Vérifions que : $n^3+3n^2+2n=n(n+1)(n+2)$

$n(n+1)(n+2)=(n^2+n)(n+2)=n^3+2n^2+n^2+2n=n^3+3n^2+2n$

b) Montrons que : n^3+3n^2+2n est un multiple de 3 si $n\in\mathbb{N}$

Etudions tous les cas : $n=3k$; $n=3k+1$ et $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

Il y'a trois façons d'écrire n : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

1ére cas : si $n=3k$: $n^3+3n^2+2n=3\left[k(3k+1)(3k+2)\right]=3k'$ avec : $k'=k(3k+1)(3k+2)\in\mathbb{N}$

Donc : n^3+3n^2+2n est un multiple de 3 dans ce cas

2ére cas : si $n=3k+1$: $n^3+3n^2+2n=(3k+1)(3k+2)(3k+3)=3\left[(3k+1)(3k+2)(k+1)\right]=3k'$

Avec : $k'=(3k+1)(3k+2)(k+1)\in\mathbb{N}$

Donc : n^3+3n^2+2n est un multiple de 3 dans ce cas aussi

3ére cas : si $n=3k+2$

$n^3+3n^2+2n=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=3\left[(3k+2)(k+1)(3k+4)\right]=3k'$

Avec : $k'=(3k+2)(k+1)(3k+4)\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : n^3+3n^2+2n est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par

Disjonction des cas le nombre n^3+3n^2+2n est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice05 : (3pts)

$m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $m>n$

1) Montrer que : $m+n$ et $m-n$ ont la même parité (1pts)

2) Déterminer tous les couples $(m;n)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :

$m^2-n^2=96$ (1) (2pts)

Correction :1) $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $m>n$

Si $m-n$ est pair alors il existe : $k\in\mathbb{N}$ tel que : $m-n=2k$ donc : $m-n+2n=2k+2n$

Donc : $m+n=2(k+n)=2k'$ avec **:** $k'=k+n\in\mathbb{N}$

Donc : $m+n$ est pair

Si $m-n$ est impair alors il existe : $k\in\mathbb{N}$ tel que : $m-n=2k+1$ donc : $m-n+2n=2k+1+2n$

Donc : $m+n=2(k+n)+1=2k'+1$ avec **:** $k'=k+n\in\mathbb{N}$

Donc : $m+n$ est impair

Conclusion : $m+n$ et $m-n$ ont la même parité

2) $m^2-n^2=96$ Équivaut a $(m+n)(m-n)=96$

Donc : $m+n$ et $m-n$ sont des diviseurs de 96

On a : $96=2^5\times 3^1$ donc les diviseurs de 96 sont : 1 ;96 ;2 ;48 ;3 ;32 ;4 ;24 ;6 ;16 ;8 ;12

Et $m+n$ et $m-n$ ont la même parité

Par suite : $\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=48 \end{cases}$ ou $\begin{cases} m-n=4 \\ m+n=24 \end{cases}$ ou $\begin{cases} m-n=6 \\ m+n=16 \end{cases}$ ou $\begin{cases} m-n=8 \\ m+n=12 \end{cases}$ car $m-n<m+n$

Donc : $\begin{cases} m=25 \\ n=23 \end{cases}$ ou $\begin{cases} m=14 \\ n=10 \end{cases}$ ou $\begin{cases} m=11 \\ n=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} m=10 \\ n=2 \end{cases}$ Par suite : les couples $(m;n)$ de nombres entiers naturels qui Vérifient la relation (1) sont : $(25;23)$; $(14;10)$; $(11;5)$; $(10;2)$

Exercice 06 : (2pts)

Soit ABC est un triangle et soit D le point tel que : $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$

Montrer que : Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et construire le point D

Corrigé : $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$ Signifie $\overrightarrow{BD}=3\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right)$

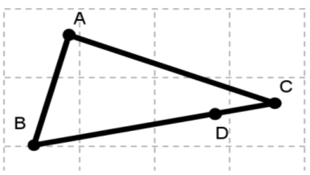
Signifie $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BC}$

Signifie $\overrightarrow{BD}-3\overrightarrow{DB}=3\overrightarrow{BC}$

Signifie $\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$

Signifie $4\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

Par suite : Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$



Exercice 07 : (4pts)

Soit ABC est un triangle. I et J sont deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (1pts)

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (1pts)

2) Déduisez que : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles (2pts)

Corrigé : 1) a) Expression de $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? D'après la relation de Chasles :

On a : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}$ d'où : $\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (1)

b) Expression de $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}$ D'où : $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ (2)

2) Pour démontrer que les droites (IC) et (BJ)

Sont parallèles il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{IC}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires

Donc : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices