Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : B

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (4pts)

1) Décomposer les nombres 3240 et 1440 en produit de facteurs premiers.
2) En déduire $PGCD(3240;1440)$ et $PPCM(3240;1440)$
3) Simplifier $\sqrt{3240}$ ***et*** $\sqrt{1440}$.
4) En déduire que $\sqrt{3240\times1440}$ est un entier naturel

Corrigé : 1) $3240=2^3\times3^4\times5$ et $1440=2^5\times3^2\times5$

2) On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de 3240 et 1440

Donc : $PGCD(3240;1440)=2^3\times3^2\times5=360$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de 3240 et 1440

$PPCM(3240;1440)=2^5\times3^4\times5=12960$

1) Simplification du : $\sqrt{3240}$ ***et*** $\sqrt{1440}$.

$\sqrt{3240}=\sqrt{2^3\times3^4\times5}=18\sqrt{10}$

$\sqrt{1440}=\sqrt{2^5\times3^2\times5}=12\sqrt{10}$

4) Déduction que $\sqrt{3240\times1440}$ est un entier naturel

$\sqrt{3240\times1440}=18\sqrt{10}\times12\sqrt{10}=18\times12\times\sqrt{10}^2=18\times12\times10=2160$

Exercice02 : (2pts)

Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse.

$a=512348306811$; $b=5348313$; $c=5^{2023}$; $d=2027$; $e=5^{2024}+3$; $f=2023$

Corrigé : $a=512348306811$ n'est pas premier car la somme des chiffres est 42 qui est multiple de 3 car 2+4=6 donc 3 divise $a=512348306811$

$b=5348313$ N'est pas premier car la somme des chiffres est 27 qui est multiple de 3 donc 3 divise $b=5348313$

$c=5^{2023}$ N'est pas premier car 5 divise $c=5^{2023}$

Est-ce que $d=2027$ est premier ? On utilise la règle :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\leq2027$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31; 37 ; 39 ; 41 ; 43 et aucun ne divise 2027.
Donc 2027 premier

$e=5^{2024}+3$ est la somme de deux nombres impairs donc e est un nombre pair

Donc :2 divise $e=5^{2024}+3$

Donc : $e=5^{2024}+3$ n'est pas premier

$f=2023$ N'est pas premier car 7 divise $f=2023$

Exercice03 : (3pts)

1) Démontrer que : $3n^2+15n+7$ est un nombre impair. (1pts)
2) Démontrer que : $5n^2-7n+4$ est un nombre pair. (1pts)
3) Démontrer que : n^4-n^2+16 est un multiple du nombre **4**.

Corrigé : 1) On a : $3n^2+15n+7=n^2+n+2n^2+14n+6+1=n(n+1)+2\times(n^2+7n+3)+1$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $3n^2+15n+7=2k+2\times(n^2+7n+3)+1$

Donc : $B=2(k+n^2+7n+3)+1=2k'+1$ avec $k'=k+n^2+7n+3$

Par suite : $3n^2+15n+7$ est un nombre impair.

2)On a : $5n^2-7n+4=n^2+n+4n^2-8n+4=n(n+1)+2\times(2n^2-4n+2)$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $5n^2-7n+4=2k+2\times(2n^2-4n+2)$

Donc : $B=2(k+2n^2-4n+2)=2k'$ avec $k'=k+2n^2-4n+2$

Par suite : $5n^2-7n+4$ est un nombre impair.

3) Démontrons que : n^4-n^2+16 est un multiple du nombre **4**.

On a : $n^4-n^2+16=n^2(n^2-1)+4\times4=n\times n(n-1)(n+1)+4\times4=(n-1)\times n\times n(n+1)+4\times4$

Et on a : $(n-1)\times n$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $(n-1)\times n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$

Donc : $n^4-n^2+16=2k'\times2k+4\times4$

Donc : $n^4-n^2+16=4k'k+4\times4=4(k'k+4)$

Donc : $n^4-n^2+16=4k''$ avec $k''=k'k+4$

Donc : n^4-n^2+16 est un multiple du nombre **4**.

Exercice04 : (3pts) Soit $n\in\mathbb{N}$

1 Soit $n\in\mathbb{N}$; Montrer que $(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+n^2+1$ (1pts)

2) Montrer que : 10101 est divisible par 111. (1pts)

3) Montrer que : 10^8+10^4+1 est divisible par 111. (1pts)

Corrigé : soit $n\in\mathbb{N}$

1) $(n^2+1-n)(n^2+1+n)=((n^2+1)-n)((n^2+1)+n)=(n^2+1)^2-n^2=n^4+2n^2+1-n^2=n^4+n^2+1$

Donc : $(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+n^2+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) On a : $(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+n^2+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Pour : $n=10$ on a donc : $(10^2+1-10)(10^2+1+10)=10^4+10^2+1$

Donc : $10000+100+1=(100+1-10)(100+1+10)$

Donc : $10101=91\times111$ c'est-à-dire que : 10101 est divisible par 111

On a : $(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+n^2+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Pour : $n=10^2$ on a donc : $(10^4+1-10^2)(10^4+1+10^2)=10^8+10^4+1$ et puisque :

$10^4+1+10^2=10101=91\times111$ est divisible par 111

Alors : $10^8+10^4+1=\left(10^4+1-100\right)\times 91\times 111=k\times 111$ Avec : $k=\left(10^4+1-100\right)\times 91\in\mathbb{N}$

Par suite : 10^8+10^4+1 est divisible par 111.

Exercice05 : (3pts) $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $m>n$

1) Montrer que : $m+n$ et $m-n$ ont la même parité (1pts)

2) Déterminer les nombres entiers naturels x et y qui vérifient la relation : $x^2-y^2=12\ (1)$ (2pts)

Correction :1) $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $m>n$

Si $m-n$ est pair alors il existe : $k\in\mathbb{N}$ tel que : $m-n=2k$ donc : $m-n+2n=2k+2n$

Donc : $m+n=2\left(k+n\right)=2k'$ avec **:** $k'=k+n\in\mathbb{N}$

Donc : $m+n$ est pair

Si $m-n$ est impair alors il existe : $k\in\mathbb{N}$ tel que : $m-n=2k+1$ donc : $m-n+2n=2k+1+2n$

Donc : $m+n=2\left(k+n\right)+1=2k'+1$ avec **:** $k'=k+n\in\mathbb{N}$

Donc : $m+n$ est impair

Conclusion : $m+n$ et $m-n$ ont la même parité

2) $x^2-y^2=12$ signifie que $\left(x+y\right)\left(x-y\right)=12$

Donc : $m+n$ et $m-n$ sont des diviseurs de 96

Comme on a : $12=1\times 12=2\times 6=3\times 4$ Et $x+y$ et $x-y$ ont la même parité et $x-y<x+y$

Par suite : $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=6 \end{cases}$ C'est-à-dire : $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

Exercice06 : (1pts) Soient A, B et M quatre points du plan tels que : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Montrer que Le point M appartient à la droite $\left(AB\right)$

Corrigé : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : - $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $5\overrightarrow{MA}=-6\overrightarrow{AB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : les points A, B et M sont alignés

Par suite : le point M appartient à la droite $\left(AB\right)$

Exercice07 : (4pts)

Soit ABC est un triangle. E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

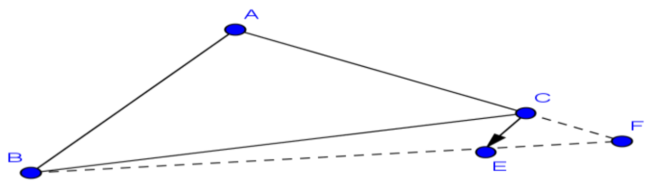
1) Faire une figure (0.5pts)

2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (1pts)

3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (1pts)

4) En déduire que : les points E, F et B sont alignés (1.5pts)

Corrigé :1) La figure :



2) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$

3) Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}}$

4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?

$\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ Donc $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires

D'où : Les points E, F et B sont alignés

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices