Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : C

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (2.5pts)

1) Décomposer les nombres 56700 et 176400 en produit de facteurs premiers. (1pts)

2) En déduire une écriture simplifiée des nombres suivants : $\frac{56700}{176400}$ et $\sqrt{176400}$ et $\sqrt{56700}$ (1.5pts)

Corrigé :

1) $56700 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ et $176400 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$

2) $\frac{56700}{176400} = \frac{2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7}{2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2} = \frac{3^2}{2^2 \times 7} = \frac{9}{28}$

$\sqrt{176400} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2} = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1 = 420$

$\sqrt{56700} = \sqrt{2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7} = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times \sqrt{7} = 90\sqrt{7}$

Exercice02 : (4pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = 11^{n+2} - 11^n$; $b = 3\times 11^{n+1} + 5\times 11^n$

1) Montrer que : a est un multiple de 3 et que b un multiple de 19 (2pts)

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b (1pts)

3) En déduire $PGCD(a;b)$ **et** $PPCM(a;b)$.(1pts)

Corrigé : 1) $a = 11^{n+2} - 11^n = 11^n \times 11^2 - 11^n \times 1 = 11^n \times (11^2 - 1)$

$a = 120\times 11^n = 3\times 40\times 11^n = 3\times k$ Avec $k = 40\times 11^n \in \mathbb{N}$

Donc a est un multiple de 3

On a : $b = 3\times 11^{n+1} + 5\times 11^n = 3\times 11^n \times 11^1 + 5\times 11^n = 11^n (3\times 11 + 5) = 38\times 11^n = 19\times 2\times 11^n = 19\times k$

Avec : $k = 2\times 11^n \in \mathbb{N}$

Donc b un multiple de 19

2) Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b

On a trouvé que : $a = 3\times 40\times 11^n = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 11^n$

Et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b = 2^1 \times 11^n \times 19^1$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de b

3) Déduction du : $PGCD(a;b)$ **et** $PPCM(a;b)$.

On a : $a = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 11^n$ et $b = 2^1 \times 11^n \times 19^1$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b) = 2^1 \times 11^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PPCM(a;b) = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 11^n \times 19 = 2280\times 11^n$

Exercice03: (3pts) Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse.

$a = 948306811$; $b = 91011231$; $c = 7^{2027}$; $d = 2029$; $e = 7^{2023} + 1$; $f = 2005$

Corrigé : $a = 948306811$ n'est pas premier car la somme des chiffres est 39 qui est multiple de 3 car $39 = 3\times 13$ donc 3 divise $a = 948306811$

$b = 91011231$ N'est pas premier car la somme des chiffres est 18 qui est multiple de 9 donc 9 divise $b = 91011231$

$c = 7^{2027}$ N'est pas premier car 7 divise c

Est-ce que $d = 2029$ est premier ? On utilise la règle :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 2029$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 39 ; 41 ; 43 et aucun ne divise 2029. Donc 2029 est premier

$e = 7^{2023} + 1$ est la somme de deux nombres impairs donc e est un nombre pair

Donc :2 divise $e = 7^{2023} + 1$

Donc : $e = 7^{2023} + 1$ n'est pas premier

$f = 2005$ N'est pas premier car 5 divise f

Exercice04 : (5pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n > 1$ on pose : $A = (3n-2)(3n-1)+1$ et $B = 9n^2 - 12n + 4$ et $C = 9n^2 - 6n + 1$

1) Déterminer la parité de : $A = (3n-2)(3n-1)+1$ (2pts)

2) Montrer que B et C sont des carrés parfaits. (1pts)

3) Montrer que $B < A < C$. (1pts)

4) En déduire que A n'est pas un carré parfait. (1pts)

Corrigé : 1) Déterminons la parité de : $A = (3n-2)(3n-1)+1$

$A = (3n-2)(3n-1)+1 = (3n-2)((3n-2)+1)-1 = m(m+1)-1$ avec $3n-2 = m \in \mathbb{N}$ Car $n > 1$

Or $m(m+1)$ est le produit de deux nombres entiers consécutifs donc c'est un nombre pair et 1 est impair

Donc : $m(m+1)-1$ est un nombre impair

Conclusion : $A = (3n-2)(3n-1)+1$ est impair si $n \in \mathbb{N}$

2)Montrons que B et C sont des carrés parfaits.

a) $B = 9n^2 - 12n + 4 = (3n)^2 - 2\times 6n \times 1 + 2^2 = (3n-2)^2 = (k)^2$ avec $3n-2 = k \in \mathbb{N}$ Car $n > 1$

Donc : B est un carré parfait.

b) $C = 9n^2 - 6n + 1 = (3n)^2 - 2\times 3n \times 1 + 1^2 = (3n-1)^2 = (k)^2$ avec $3n-1 = k \in \mathbb{N}$ Car $n > 1$

Donc : C est un carré parfait.

3) Montrons que : $B < A < C$.

$A = (3n-2)(3n-1)+1 = (3n)^2 - 3n - 3n \times 2 + 2 + 1 = 9n^2 - 3n - 6n + 1 = 9n^2 - 9n + 3$

$A - B = (9n^2 - 9n + 3) - (9n^2 - 12n + 4) = 9n^2 - 9n + 3 - 9n^2 + 12n - 4 = 3\times n - 1 > 0$ Car $n > 1$

Donc : $B < A$ ①

$C - A = (9n^2 - 6n + 1) - (9n^2 - 9n + 3) = 9n^2 - 6n + 1 - 9n^2 + 9n - 3 = 3\times n - 2 > 0$ Car $n > 1$

Donc : $A < C$ ②

De ① et ② on déduit que : $B < A < C$

4) Déduction que A n'est pas un carré parfait.

On a : $B < A < C$ donc : $(3n-2)^2 < A < (3n-1)^2$

Donc : $\sqrt{(3n-2)^2} < \sqrt{A} < \sqrt{(3n-1)^2}$

Donc : $3n-2 < \sqrt{A} < 3n-1$ et $3n-2$ *et* $3n-1$ sont deux nombres entiers consécutifs Car $3n-1 = (3n-2)+1$

Donc : $\sqrt{A}$ n'est pas un entier naturel ou A n'est pas un carré parfait.

Exercice05 : (2pts) Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que : $7\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

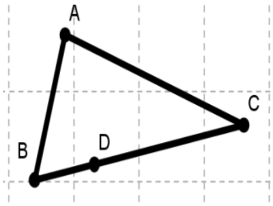
Montrer que Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et construire les points D

Corrigé : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{7}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$

Et par suite les vecteurs : $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

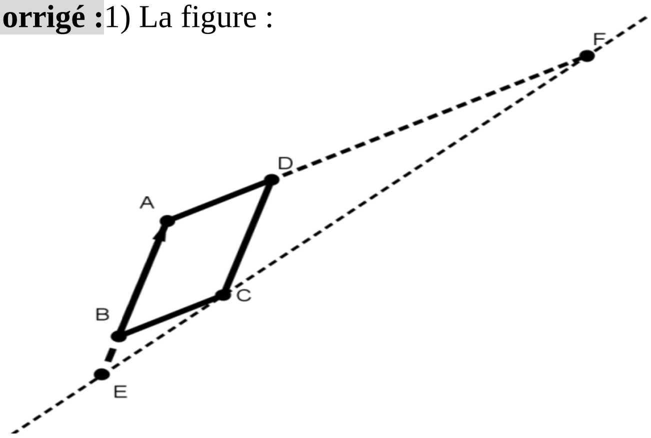


Exercice06 : (3.5pts) Soit ABCD un parallélogramme.

E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Faire une figure (0.5pts)
2) Montrer que $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EC}$ (2pts)
3) En déduire que : Les points E, F et C sont alignés (1pts)

Corrigé : 1) La figure :



2)On a : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$

Donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{AD}$

Car : $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EF} = 4\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EC}$

3) On a : $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.

D'où : les points E, F et C sont alignés

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices