Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : D

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (2pts)

1) Décomposer les nombres 540 et 396 en produit de facteurs premiers. (1pts)

2) En déduire $PGCD(540;396)$ et $PPCM(540;396)$ (1pts)

Corrigé :1)

396	2	540	2
198	2	270	2
99	3	135	3
33	3	45	3
11	11	15	3
1		5	5
		1	

$540 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$

2) On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de 540 et 396

Donc : $PGCD(540;396) = 2^2 \times 3^2 = 36$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de 540 et 396

$PPCM(540;396) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11 = 5940$

Exercice02 : (2pts)

a est un entier naturel. On pose $m = a^2 + 2a$.

Montrer que $m+1$ est un multiple de $a+1$

Corrigé : $m+1 = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = (a+1)(a+1) = (a+1) \times k$ Avec : $k = a+1 \in \mathbb{N}$

Donc : $m+1$ est un multiple de $a+1$

Exercice03: (4pts) $n \in \mathbb{N}$

Soit n entier naturel. On pose : $a = (n+1)(n+2)$ et $b = n(n+3)$

1) Montrer que : a et b sont pairs. (1pts)

2) a) Montrer que : $a = b+2$; (05pts)

b) En déduire que : $ab+1 = (b+1)^2$ (1pts)

3) Déduire de ce qui précède que : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2$ (1pts)

4) Déterminer le nombre entier dont le carré est égal : $2021 \times 2022 \times 2023 \times 2024 + 1$ (justifier) (1.5pts)

Corrigé : a) $a = (n+1)(n+2)$

Si $n+1$ est pair alors il existe : $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n+1 = 2k$ donc :

$a = (n+1)(n+2) = (n+1)(n+1+1) = 2k(2k+1) = 2k'$

Donc : $a = 2k'$ avec : $k' = k(2k+1) \in \mathbb{N}$

Donc : a est pair

Si $n+1$ est impair alors il existe : $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n+1 = 2k+1$ donc :

$a = (n+1)(n+2) = (n+1)(n+1+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2k'$

Donc : $a = (n+1)(n+2) = 2k'$ avec : $k' = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}$

Donc : a est impair

Conclusion : a est pair si $n \in \mathbb{N}$

b) $b = n(n+3) = n(n+1+2) = n(n+1) + 2n$

Or $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc c'est un nombre pair et $2n$ est pair

Donc : $n(n+1)+2n$ est un nombre pair

Conclusion : b est pair si $n\in\mathbb{N}$

2) a) Montrons que : $a=b+2$

$a=(n+1)(n+2)=n^2+2n+n+2=n^2+3n+2$

$b+2=n(n+3)+2=n^2+3n+2=a$

b) En déduire que : $ab+1=(b+1)^2$

On a : $a=b+2$ donc : $ab=b(b+2)=b^2+2b$

Donc : $ab+1=b^2+2b+1=(b+1)^2$

3) Déduction de ce qui précède que : $n(n+1)(n+2)+1=(n^2+3n+1)^2$

On a : $ab+1=(b+1)^2$

Donc : $(n+1)(n+2)n(n+3)+1=(n(n+3)+1)^2$

Donc : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$

4) Déterminons le nombre entier dont le carré est égal : $2011\times2012\times2013\times2014+1$

On a : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$

En prend : $n=2021$

Donc : $2021(2021+1)(2021+2)(2021+3)+1=(2021^2+3\times2021+1)^2$

Donc : $2021\times2022\times2023\times2024+1=(2021^2+3\times2021+1)^2$

Donc : $2021\times2022\times2023\times2024+1=(4\,090\,505)^2$

Le nombre entier dont le carré est égal : $4\,090\,505$

Exercice04 : (4 pts) Soient les nombres : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

1) Montrer que 101 est un nombre premier (0.5pts)

2) Montrer que 1111 n'est pas un nombre premier (0.5pts)

3) Déterminer D_{1111} l'ensemble des diviseurs de1111 (0.5pts)

4) Développer : $(x-1)(y-2)$ (0.5pts)

5) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels x et y vérifiant la relation :

$xy-2x-y=1109\ (1)$ (2pts)

Corrigé : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

1) Montrons que : 101 est un nombre premier

On utilise la règle : On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\leq101$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 et aucun ne divise 101.

Donc : 101 premier

2) On a : $1111=11\times101$ donc 11 divise1111

Par suite : 1111 n'est pas un nombre premier

3) Déterminons : D_{1111} l'ensemble des diviseurs de1111

On a : $1111=11\times101$ et 11 et 101 sont premiers

Donc : $D_{1111}=\{1;11;101;1111\}$

4) $(x-1)(y-2)=xy-2x-y+2$

5) Déterminons tous les couples d'entiers naturels x et y vérifiant la relation : $xy-2x-y=1109\ (1)$

$xy-2x-y=1109 \Leftrightarrow xy-2x-y+2=1109+2 \Leftrightarrow (x-1)(y-2)=1111$

Par suite : $\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=1111 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1=11 \\ y-2=101 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1=1111 \\ y-2=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1=101 \\ y-2=11 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=2 \\ y=1113 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=12 \\ y=103 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=1112 \\ y=3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=102 \\ y=13 \end{cases}$

Par suite : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont :

$(2;1113)$; $(12;103)$; $(1112;3)$; $(102;13)$

Exercice05 : (3pts) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que des nombres suivants sont des nombres impairs :

$A=n^2+13n+17$ $\quad B=n^3-n+1$ $\quad C=(2n+2)^2-(2n+1)^2$

Corrigé : $A=n^2+13n+17$

$A=n^2+13n+17=n^2+n+12n+16+1=n(n+1)+2(6n+8)+1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$A=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$ Avec : $k''=k+k' \in \mathbb{N}$

Donc $A=n^2+13n+17$ est un nombre impair

$B=n^3-n+1=n(n^2-1)+1=n(n^2-1^2)+1=n(n+1)(n-1)+1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$B=2k(n-1)+1=2k''+1$ Avec : $k''=k(n-1) \in \mathbb{N}$

Donc $B=n^3-n+1$ est un nombre impair

$C=(2n+2)^2-(2n+1)^2$

$C=(2n+2)^2-(2n+1)^2=[(2n+2)-(2n+1)][(2n+2)+(2n+1)]=(2n+2-2n-1)(2n+2+2n+1)$

$C=4n+3=4n+2+1=2(2n+1)+1=2\times k+1$ avec $k=2n+1 \in \mathbb{N}$

Donc $C=(2n+2)^2-(2n+1)^2$ est un nombre impair

Exercice 06 : (3pts) (**) Soit ABC est un triangle.

1) Soit le vecteur : $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires (1pts)

2) Soit le vecteur : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

a) Exprimer le vecteur $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (1pts)

b) Montrer que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires sachant que : $\vec{w}=9\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ (1pts)

Corrigé : 1) On a : $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Donc : $\vec{u}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

Donc : $\vec{u}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Par suite : les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

2) a) On a : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) b) $\vec{w} = 9\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = -3\left(-3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\vec{w} = -6\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = -6\vec{v}$

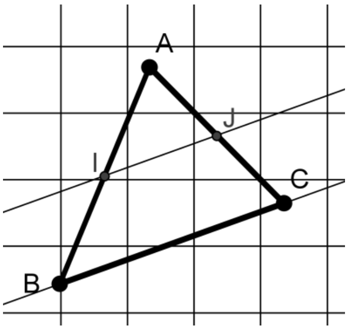
Par suite : les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

Exercice 07 : (2pts) (**) Soit ABC est un triangle.

Le point I est le milieu du coté $[AB]$ et J est le milieu du coté $[AC]$

Montrer que deux droites (IJ) et (BC) sont parallèles

Corrigé :



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ} = 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

Par suite les droites (IJ) et (BC) sont parallèles

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices