Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : E

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (5pts) On considère les nombres : $a=6600$ et $b=1764$

1) Décomposer chacun des nombres a et b (1pts)
2) Quel est parmi les nombres a et b celui qui est un carré parfait ? (1pts)
3) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le nombre ka soit un cube parfait. (1pts)
4) Calculer : $PGCD(a;b)$ **et** $PPCM(a;b)$.(1pts)
5) En déduire la forme simplifier de chacun des nombres : $\frac{6600}{1764}$ et $\sqrt{6600\times1764}$ (1pts)

Corrigé : 1) Décomposons chacun des nombres a et b

$6600=2^3\times3^1\times5^2\times11^1$ et $1764=2^2\times3^2\times7^2$

2) $1764=2^2\times3^2\times7^2=(2\times3\times7)^2=(42)^2$

$b=1764$ Est un carré parfait mais $6600=2^3\times3^1\times5^2\times11^1$ n'est pas un carré parfait

3Déterminons le plus petit entier naturel k tel que , le nombre ka soit un cube parfait.

On a : $a=2^3\times3^1\times5^2\times11^1$

Donc : $11\times2\times3\times a=2^4\times3^2\times5^2\times11^2=(2^2\times3^1\times5^1\times11^1)^2=(660)^2$

Donc : le plus petit entier naturel k tel que , le nombre ka soit un cube parfait. Est : $11\times2\times3=66$

4) On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b)=2^2\times3^1=12$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

$PPCM(a;b)=2^3\times3^2\times5^2\times7^2\times11=970\ 200$

1) Déduction de la forme simplifier de chacun des nombres : $\frac{6600}{1764}$ et $\sqrt{6600\times1764}$

$$\frac{6600}{1764}=\frac{6600\div12}{1764\div12}=\frac{550}{147}$$

$$\sqrt{6600\times1764}=\sqrt{2^3\times3^1\times5^2\times11^1\times2^2\times3^2\times7^2}=\sqrt{2^2\times2^1\times3^1\times5^2\times11^1\times2^2\times3^2\times7^2}$$

$$=\sqrt{2^2\times5^2\times2^2\times3^2\times7^2}\sqrt{2^1\times3^1\times11^1}=2\times5\times2\times3\times7\sqrt{2^1\times3^1\times11^1}=420\sqrt{66}$$

Exercice02 : (1pts)

Déterminer l'entier naturels a pour que : $\overline{234a}$ est divisible par 3 et n'est pas divisible par 9 et impaire

Corrigé :

Le nombre 234a est divisible par3 si la somme de ces chiffres est divisible par 3 et pas divisible par 9

C'est-à-dire : $2+3+4+a$ **est divisible par** 3 et pas divisible par 9

C'est-à-dire : $9+a$ **est divisible par** 3 et pas divisible par 9

Et $a\in\{1;3;5;7;9\}$ alors : $a=3$

Exercice03 : (2pts)

1) Est-ce que le nombre 2017 est premier ? justifier (1pts)
2) Est-ce que le nombre 27000001est premier ? justifier (1pts)

Corrigé :

1) Est-ce que 2017 est premier ? On utilise la règle :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\le2017$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 39 ; 41 ; 43 et aucun ne divise 2017.
Donc 2017est premier

2) Est-ce que 2017 est premier ?

27000001 n'est pas premier car 7 divise 27000001 ($27000001 = 7\times 3\,857\,143$)

Exercice04 : (3pts) Soient : x et y deux entiers naturels

On pose : $A = (x+2y)^2 - x^2$

1) Montrer que : $A \in \mathbb{N}$ (1pts)

2) Montrer que : A est pair (1pts)

3) Montrer que : A est un multiple de 4. (1pts)

Corrigé : 1) On a : $A = (x+2y)^2 - x^2 = (x+2y-x)(x+2y+x) = 2y(2x+2y)$

$x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ et $2 \in \mathbb{N}$ donc : $A \in \mathbb{N}$

2) On a : $A = 2y(2x+2y) = 2k$ avec : $k = y(2x+2y) \in \mathbb{N}$

Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $A = 2k$

Par suite : A est pair

3) On a : $A = 2y(2x+2y) = 4y(x+y) = 4k$ avec : $k = y(x+y) \in \mathbb{N}$

Par suite : A est un multiple de 4.

Exercice05 : (4pts)

On considère les nombres $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$

1) Déterminer la parité du nombre $a = 2x-3$ (1pts)

2) Déterminer D_{14} l'ensemble des diviseurs du nombre 14. (1pts)

3) Développer l'expression $(2x-3)(3y+2)$ (0.5pts)

4) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels x et y vérifiant la relation :

$6xy + 4x - 9y = 20 \ (1)$ (1.5pts)

Corrigé : $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$

1) $a = 2x-3 = 2x-4+1 = 2(x-2)+1 = 2k+1$ Avec $k = x-2$ un entier

2) $\sqrt{14} \approx 3.7$

On cherche les diviseurs de 14 inferieurs ou égales a 3

$D_{14} = \{1\,;2\,;\ 7\,;14\}$

3) $(2x-3)(3y+2) = 6xy + 4x - 9y - 6$

4) Déterminons tous les couples d'entiers naturels x et y vérifiant la relation : $6xy + 4x - 9y = 20$

$6xy + 4x - 9y = 20 \Leftrightarrow 6xy + 4x - 9y - 6 = 14 \Leftrightarrow (2x-3)(3y+2) = 14$

Par suite : $\begin{cases} 2x-3=1 \\ 3y+2=14 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x-3=2 \\ 3y+2=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x-3=14 \\ 3y+2=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x-3=7 \\ 3y+2=2 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$ car $\begin{cases} 2x-3=2 \\ 3y+2=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x-3=14 \\ 3y+2=1 \end{cases}$ n'ont pas de solutions

Par suite : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont : $(2;4)$ **;** $(5;0)$

Exercice06 : (5pts)

Soit ABCD un parallélogramme et E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{DE} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

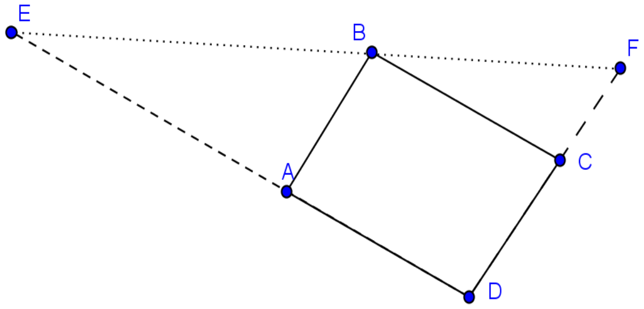
1) Faire une figure (0.75pts)

2) Montrer que : $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$ et que : $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ (2pts)

3) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (0.75pts)

b) Vérifier que : $2\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{BF} = \vec{0}$ et en déduire que : Les points E, F et B sont alignés (1,5pts)

Corrigé : 1) La figure :



On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}}$

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}\quad=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}}$

2)a) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ Car : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ (ABCD un parallélogramme)

Donc : $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}\quad(1)$

Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$ donc : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}\,(2)$

2) b) Vérifions que : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$.

$2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=2(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC})+3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?

On a : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ donc : $2\overrightarrow{BE}=-3\overrightarrow{BF}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BF}$

D'où les points E, F et B sont alignés.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices