Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : F

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (7pts)

On considère les nombres : $a=2340$ et $b=504$

1) Vérifier que : les décomposer des nombres a et b sont : $a=2^2\times3^2\times5^1\times13^1$ et $b=2^3\times3^2\times7^1$ (1pts)

2) Calculer : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$. (2pts)

3) Déterminer le nombre de diviseurs des nombres de a (1pts)

4) Donner la forme simplifiée du nombre : $\frac{7a}{13b}$ (1pts)

5) Montrer que le nombre $\sqrt{\frac{a\times b}{910}}$ est un entier naturel. (Remarque : $91=13\times7$) (1pts)

6) Montrer que le nombre $\frac{450\times a\times b}{91}$ est un cube parfait. (1pts)

Corrigé : 1) La décomposons des nombres a et b

On peut utiliser la calculatrice pour Vérifier que : $a=2^2\times3^2\times5^1\times13^1$ et $b=2^3\times3^2\times7^1$

2) Calculons le : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$.

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b)=2^2\times3^2=4\times9=36$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

$PPCM(a;b)=2^3\times3^2\times5^1\times7\times13=32760$

3) Déterminons le nombre de diviseurs des nombres a

On a : $a=2^2\times3^2\times5^1\times13^1$ donc : le nombre de diviseurs des nombres a est :

$(2+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=3\times3\times2\times2=36$

4) Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\frac{7a}{13b}$

$$\frac{7a}{13b}=\frac{7\times2^2\times3^2\times5^1\times13^1}{13\times2^3\times3^2\times7^1}=\frac{5}{2}$$

5) Montrons que le nombre $\sqrt{\frac{a\times b}{910}}$ est un entier naturel.

$$\sqrt{\frac{a\times b}{910}}=\sqrt{\frac{2^2\times3^2\times5^1\times13^1\times2^3\times3^2\times7^1}{10\times7^1\times13^1}}=\sqrt{\frac{2^2\times3^2\times5^1\times13^1\times2^3\times3^2\times7^1}{2^1\times5^1\times7^1\times13^1}}=\sqrt{2^4\times3^4}$$

$$\sqrt{\frac{a\times b}{910}}=\sqrt{\left(2^2\times3^2\right)^2}=2^2\times3^2=36\in\mathbb{N}$$

6)Montrons que le nombre $\frac{450\times a\times b}{91}$ est un cube parfait.

$$\frac{450\times a\times b}{91}=\frac{2^1\times3^2\times5^2\times2^2\times3^2\times5^1\times13^1\times2^3\times3^2\times7^1}{7^1\times13^1}=2^6\times3^6\times5^3=\left(2^2\times3^2\times5^1\right)^3=(180)^3$$

Donc : le nombre $\frac{450\times a\times b}{91}$ est un cube parfait.

Exercice02 : (2pts)

Soit : $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$ tel que $n-3$ est multiple de 4 .

Montrer que : $A = n^2 + 6n + 5$ est un multiple de 16.

Corrigé : On a : $n-3$ est multiple de 4

Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n-3 = 4k$ c'est-à-dire : $n = 4k+3$

Donc : $A = n^2 + 6n + 5 = (4k+3)^2 + 6(4k+3) + 5$

Donc : $A = 16k^2 + 24k + 9 + 24k + 18 + 5 = 16k^2 + 48k + 32 = 16(k^2 + 3k + 2)$

Par suite : A est un multiple de 16.

Exercice03 : (4,5pts)

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que $n \times (n+1)$ est un nombre pair (2pts)

2) Déterminer la parité des nombres suivants :

$a = 12n^2 + 15$; $b = n^3 - n$; $c = (2n+1)^{2023}$; $d = n^2 + 3n + 1$; $e = n^2 + 2026n$ (2,5pts)

Corrigé : 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On va monter que : $n \times (n+1)$ est un nombre pair

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

En effet :**1ére cas :** si n est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k$ par suite :

$n \times (n+1) = 2k \times (2k+1) = 2[k \times (2k+1)] = 2k'$ avec $k' = k \times (2k+1) \in \mathbb{N}$

Cela signifie que : $n \times (n+1)$ est pair

2ére cas : si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k+1$

Par suite : $n \times (n+1) = (2k+1) \times (2k+1+1)$

Donc : $n \times (n+1) = (2k+1) \times (2k+2) = 2(2k+1) \times (k+1)$

Donc : $n \times (n+1) = 2k'$ avec $k' = (2k+1) \times (k+1) \in \mathbb{N}$

Cela signifie que : $n \times (n+1)$ est pair

2) $a = 12n^2 + 15 = 2(6n^2 + 7) + 1 = 2 \times k + 1$ avec $k = 6n^2 + 7 \in \mathbb{N}$

Donc $a = 12n^2 + 15$ est un nombre impair

$b = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n^2 - 1^2) = n(n-1)(n+1)$

$n^3 - n = (n-1) \times n \times (n+1)$

$n \times (n+1)$ Est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc : $n \times (n+1) \times (n-1)$ est aussi pair

Donc : $b = n^3 - n$ est pair

$c = (2n+1)^{2023}$

On a : $2n+1$ est impair

Donc : $c = (2n+1)^{2023}$ est le produit de nombres impair

Donc : $c = (2n+1)^{2023}$ est un nombre impair

$d = n^2 + 3n + 1 = n^2 + n + 2n + 1 = n \times (n+1) + (2n+1)$

On a : $n \times (n+1)$ Est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Et $2n+1$ est impair

Donc : $n \times (n+1) \oplus (2n+1)$ c'est la somme d'un nombre pair et un nombre impair

Par suite : $d = n\times(n+1)+(2n+1)$ est impair

Etude de la parité $e = n^2 + 2026n$

1ére cas : 1cas : si n pair

$n^2 = n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $2026n = 2\times 1013n = 2\times k$ est pair

On a : $n^2 + 2026n$ c'est la somme de deux Nombres pairs

Donc : $n^2 + 2026n$ est pair

2ére cas : 1cas : si n impair

$n^2 = n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $2026n = 2\times 1013n = 2\times k$ est pair

On a : $n^2 + 2026n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair

Donc : $n^2 + 2026n$ est impair

Exercice04 : (2.5pts)

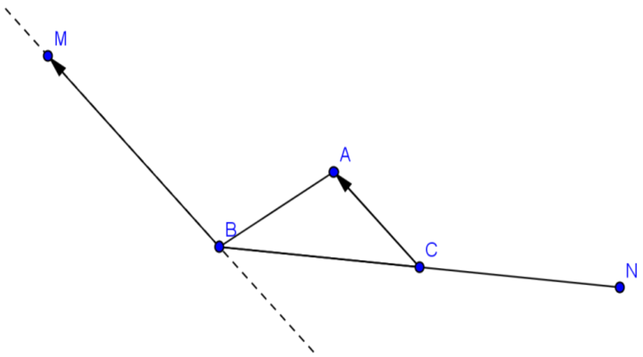
Soit ABC est un triangle.

1) Construire le point M tel que: $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{AC}$ (0.5pts)

2) Construire le point N tel que: $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ (0.5pts)

3) Montrer que : A est le milieu du segment $[MN]$ (1.5pts)

Corrigé : 1) construction du point M



2) Construction du point N : on a : $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ Donc $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC}$ et par suite : C est le milieu du segment $[BN]$

Et on peut construire le point N

3) Pour montrer que A est le milieu du segment $[MN]$ il suffit de Montrer que : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0}$?

On a : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Donc: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Par suite : A est le milieu du segment $[MN]$

Exercice05 : (4pts)

Soit ABC est un triangle.

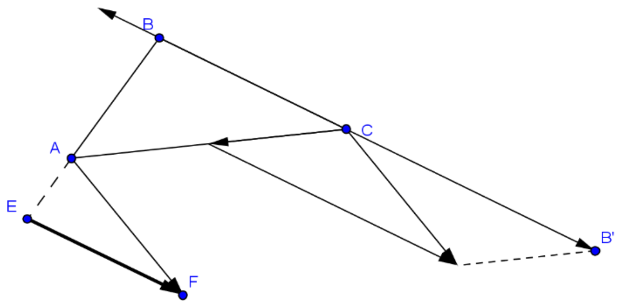
Soient les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure. (1pts)

2) Montrer que : $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$. (2pts)

3) Que peut-on déduire ? (1pts)

Corrigé : 1) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2) On a : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ donc : $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$: C'est-à-dire $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}$ et par suite : $\overrightarrow{EF}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

3) On a : $\overrightarrow{EF}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et par suite : les deux droites (EF) et (BC) sont parallèles

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices