Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : G

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (5pts)

On considère les nombres : $a=1320$ et $b=7020$

1) Décomposer chacun des nombres a et b (1pts)

2) Calculer : $PGCD(a;b)$ **et** $PPCM(a;b)$. (1pts)

3) Déterminer le nombre de diviseurs des nombres a et b (1pts)

4) Donner la forme simplifiée du nombre : $\frac{13a}{11b}$ (0.5pts)

5) Montrer que le nombre $\sqrt{\frac{a\times b}{286}}$ est un entier naturel. (1pts)

6) Montrer que le nombre $\frac{1210\times a\times b}{39}$ est un cube parfait. (0.5pts)

Corrigé : 1) Décomposons chacun des nombres a et b

$1320=2^3\times3^1\times5^1\times11^1$ et $7020=2^2\times3^3\times5^1\times13^1$

2) Calculons le : $PGCD(a;b)$ **et** $PPCM(a;b)$.

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b)=2^2\times3^1\times5^1=60$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

$PPCM(a;b)=2^3\times3^3\times5^1\times11\times13=154440$

3) Déterminons le nombre de diviseurs des nombres a et b

a) On a : $a=1320=2^3\times3^1\times5^1\times11^1$ donc : le nombre de diviseurs des nombres a est :

$(3+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=4\times2\times2\times2=32$

b) On a : $b=7020=2^2\times3^3\times5^1\times13^1$ donc : le nombre de diviseurs des nombres b est :

$(2+1)\times(3+1)\times(1+1)\times(1+1)=3\times4\times2\times2=48$

4) Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\frac{13a}{11b}$

$$\frac{13a}{11b}=\frac{13\times2^3\times3^1\times5^1\times11^1}{11\times2^2\times3^3\times5^1\times13^1}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$$

5) Montrons que le nombre $\sqrt{\frac{a\times b}{286}}$ est un entier naturel.

$$\sqrt{\frac{a\times b}{286}}=\sqrt{\frac{2^3\times3^1\times5^1\times11^1\times2^2\times3^3\times5^1\times13^1}{2^1\times11^1\times13^1}}=\sqrt{2^2\times3^1\times5^1\times2^2\times3^3\times5^1}$$

$$\sqrt{\frac{a\times b}{286}}=\sqrt{2^2\times3^4\times5^2\times2^2}=2^1\times3^2\times5^1\times2^1=2^1\times3^2\times5^1\times2^1=180\in\mathbb{N}$$

6)Montrons que le nombre $\frac{1210\times a\times b}{39}$ est un cube parfait.

$$\frac{1210\times a\times b}{39}=\frac{2^1\times5^1\times11^2\times2^3\times3^1\times5^1\times11^1\times2^2\times3^3\times5^1\times13^1}{3^1\times13^1}=2^6\times5^3\times11^3\times3^3=\left(2^2\times5^1\times11^1\times3^1\right)^3$$

$\frac{1210\times a\times b}{39}=(660)^3$

Donc : le nombre $\frac{1210\times a\times b}{39}$ est un cube parfait.

Exercice02 : (4pts)

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n>1$ on pose : $X=(5n+1)(5n+2)-1$ et $E=25n^2+10n+1$ et $F=25n^2+20n+4$

1) Déterminer la parité de : $X=(5n+1)(5n+2)-1$ (1pts)

2) Montrer que E et F sont des carrés parfaits. (1pts)

3) Montrer que $E<X<F$. (1pts)

4) En déduire que $\sqrt{X}$ n'est pas un entier naturel ou X n'est pas un carré parfait. (1pts)

Corrigé :

1) Déterminons la parité de : $X=(5n+1)(5n+2)-1$

$X=(5n+1)(5n+2)-1=(5n+1)((5n+1)+1)-1=m(m+1)-1$

Or $m(m+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc c'est un nombre pair et 1 est impair

Donc : $m(m+1)-1$ est un nombre impair

Conclusion : $X=(5n+1)(5n+2)-1$ est impair si $n\in\mathbb{N}$

2)Montrons que E et F sont des carrés parfaits.

a) $E=25n^2+10n+1=(5n)^2+2\times5n\times1+1^2=(5n+1)^2$

Donc : E est un carré parfait.

a) $F=25n^2+20n+4=(5n)^2+2\times5n\times2+2^2=(5n+2)^2$

Donc : F est un carré parfait.

3) Montrons que : $E<X<F$.

$X=(5n+1)(5n+2)-1=(5n)^2+2\times5n+5n\times1+2-1=25n^2+10n+5n+1=25n^2+15n+1$

$X-E=(25n^2+15n+1)-(25n^2+10n+1)=25n^2+15n+1-25n^2-10n-1=5\times n>0$ Car $n>1$

Donc : $E<X$ ①

$F-X=(25n^2+20n+4)-(25n^2+15n+1)=25n^2+20n+4-25n^2-15n-1=5\times n>0$ Car $n>1$

Donc : $X<F$ ②

De ① et ② on déduit que : $E<X<F$

4) Déduction que $\sqrt{X}$ n'est pas un carré parfait.

On a : $E<X<F$ donc : $(5n+1)^2<X<(5n+2)^2$

Donc : $\sqrt{(5n+1)^2}<\sqrt{X}<\sqrt{(5n+2)^2}$

Donc : $5n+1<\sqrt{X}<5n+2$ et $5n+1$ *et* $5n+2$ sont deux nombres entiers consécutifs

Donc : $\sqrt{X}$ n'est pas un entier naturel ou X n'est pas un carré parfait.

Exercice03 : (5pts) Soient les nombres : $x\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$ et $1<y-x$ et $2<x$

1) Montrer que 101 est un nombre premier (0.5pts)

2) Montrer que 1313 est divisible par 13 (0.5pts)

3) Déterminer D_{1313} l'ensemble des diviseurs de 1313 (1pts)

4) Développer : $(x-2)(y-3)$ (0.5pts)

5) Montrer que : $0<x-2<y-3$ (1pts)

6) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels x et y vérifiant la relation :

$xy-3x=2y+1307$ (1) (1.5pts)

Corrigé : 1) $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ et $1 < y - x$ et $2 < x$

1) Montrons que : 101 est un nombre premier

On utilise la règle : On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 101$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 et aucun ne divise 101.

Donc : 101 premier

2) On a : $1313 = 13 \times 101$ donc 13 divise 1313

Donc : 1313 est divisible par 13

3) Déterminons : D_{1313} l'ensemble des diviseurs de1313

On a : $1313 = 13 \times 101$ et 13 et 101 sont premiers

Donc : $D_{1313} = \{1;13;101;1313\}$

4) $(x-2)(y-3) = xy - 3x - 2y + 6$

5) Montrons que : $0 < x - 2 < y - 3$

On a : $2 < x$ donc : $0 < x - 2$ (1)

On a : $1 < y - x$ donc : $x < y - 1$

Donc : $x - 2 < y - 1 - 2$

Donc : $x - 2 < y - 3$ (2)

De : (1) **et** (2) en déduit que : $0 < x - 2 < y - 3$

6) Déterminons tous les couples d'entiers naturels x et y vérifiant la relation : $xy - 3x = 2y + 1307$ (1)

$xy - 3x = 2y + 1307 \Leftrightarrow xy - 3x - 2y = 1307 \Leftrightarrow xy - 3x - 2y + 6 = 1307 + 6 \Leftrightarrow (x-2)(y-3) = 1313$

Par suite : $\begin{cases} x - 2 = 1 \\ y - 3 = 1313 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 2 = 13 \\ y - 3 = 101 \end{cases}$ car $0 < x - 2 < y - 3$

Donc : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1316 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 15 \\ y = 104 \end{cases}$

Par suite : les couples $(x; y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont :

$(3;1316)$ **;** $(15;104)$

Exercice04 : (2pts)

Soit ABC est un triangle.

1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ (0.5pts)

2) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (0.5pts)

3) Montrer que : A est le milieu du segment $[CE]$ (1pts)

Corrigé :1) Construction du point D

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ Signifie que $\overrightarrow{AD} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

2) Construction du point E

On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Donc $ABED$ est un parallélogramme

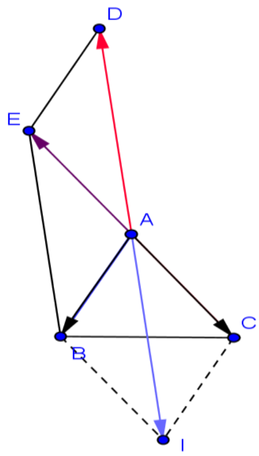
3) Pour montrer que A est le milieu du segment $[CE]$

Il suffit de Montrer que : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$?

On a : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Par suite : A est le milieu du segment $[CE]$



Exercice05 : (4pts)

Soit ABC est un triangle. Et M un point tel que : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$

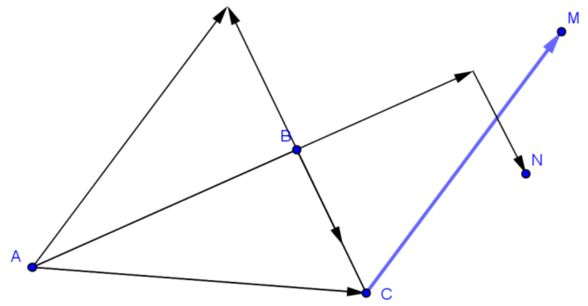
1) Faire une figure et construire le point M (0.5pts)

2) Démontrer que : Les points A, B et M sont alignés. (1,5pts)

3) Construire le point N tel que : $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (0.5pts)

4) Démontrer que : Les droites (BN) et (AC) sont parallèles (1.5pts)

Corrigé : 1) Le point M est obtenu par la construction ci-dessous



2) Pour montrer l'alignement de trois points ou le parallélisme de deux droites on montre la colinéarité de deux vecteurs bien choisis

Pour montrer que les points A, B et M sont alignés il Suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ Sont colinéaires, c'est-à-dire trouver un réel k tel que ; $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

Or : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = 2\overrightarrow{AB}$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Par suite les points A, B et M sont alignés.

3) Le point N est obtenu par la construction ci-dessus.

4) Pour montrer que Les droites (BN) et (AC) sont parallèles il Suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire trouver un réel k tel que ; $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Donc : $\overrightarrow{BN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ et par suite : $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Par suite : Les droites (BN) et (AC) sont parallèles.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices