Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : H

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (2,5pts)

Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

1) $88^3 + 53^3$ 2) $54n + 2001$ 3) $2024n + 2026$ 4) $2n^2 + 4n + 5$

5) $(2022)^2 n^2 + (2023)^2$ 6) $n^2 + 99n + 97$

Corrigé :1) $88^3 + 53^3$

88^3 Est paire car le cube d'un nombre pair

53^3 Est impaire car le produit de trois nombres impairs

$88^3 + 53^3$ C'est la somme d'un nombre pair et un nombre impair donc : c'est un nombre impair

2) $54n + 2001 = 2(27n + 1000) + 1 = 2 \times k + 1$ avec $k = 27n + 1000 \in \mathbb{N}$

Donc $54n + 2001$ est un nombre impair

3) $2024n + 2026 = 2(1012n + 1013) = 2 \times k$ avec $k = 1012n + 1013 \in \mathbb{N}$

Donc $2024n + 2026$ est un nombre pair

4) $2n^2 + 4n + 5 = 2n^2 + 4n + 4 + 1 = 2(n^2 + 2n + 2) + 1 = 2k + 1$ avec $k = n^2 + 2n + 2 \in \mathbb{N}$

Donc $2n^2 + 4n + 5$ est un nombre impair

5) $(2022)^2 n^2 + (2023)^2$

$(2022)^2 n^2 + (2023)^2 = (2 \times 1011)^2 n^2 + (2 \times 1011 + 1)^2 = 2 \times 2 \times (1011)^2 n^2 + (2 \times 1011 + 1)^2$

On a : $2 \times 2 \times (1011)^2 n^2 = 2k$ avec $k = 2 \times (1011)^2 n^2 \in \mathbb{N}$

Donc : $2 \times 2 \times (1011)^2 n^2$ est un nombre pair

$2 \times 1011 + 1$ est un nombre impair donc : $(2 \times 1011 + 1)^2$ est un nombre impair

Car le carré d'un nombre impair

Par suite : $(2022)^2 n^2 + (2023)^2$ est un nombre impair car c'est la somme d'un nombre pair et un nombre impair

6) $n^2 + 99n + 97$

$n^2 + 99n + 97 = n^2 + n + 98n + 96 + 1 = n(n+1) + 2(49n + 48) + 1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$n^2 + 99n + 97 = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1 = 2k'' + 1$ Avec : $k'' = k + k' \in \mathbb{N}$

Donc $n^2 + 99n + 97$ est un nombre impair

Exercice02 : (5pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = 7 \times 13^{n+2} - 3 \times 13^n$; $b = 3 \times 13^{n+1} + 5 \times 13^n$

1) Montrer que : a est un multiple de 59 et que b un multiple de 11 (2pts)

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b (1pts)

3) En déduire $PGCD(a;b)$ *et* $PPCM(a;b)$. (1pts)

Corrigé : 1) $a = 7 \times 13^{n+2} - 3 \times 13^n = 7 \times 13^n \times 13^2 - 3 \times 13^n = 13^n \times (7 \times 13^2 - 3)$

$a=1180\times13^n=59\times20\times13^n=59\times k$ Avec $k=20\times13^n\in\mathbb{N}$

Donc a est un multiple de 59

On a : $b=3\times13^{n+1}+5\times13^n=3\times13^n\times13^1+5\times13^n=13^n(3\times13+5)=44\times13^n=11\times4\times13^n=11\times k$

Avec : $k=4\times13^n\in\mathbb{N}$ Donc b un multiple de 11

2) Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b

On a trouvé que : $a=59\times20\times13^n=2^2\times5^1\times13^n\times59^1$ car 59 premier

Et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b=11\times4\times13^n=2^2\times11\times13^n$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de b

3) Déduction du : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$.

On a : $a=2^2\times5^1\times13^n\times59^1$ et $b=2^2\times11\times13^n$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b : donc : $PGCD(a;b)=2^2\times13^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PPCM(a;b)=2^2\times5^1\times11\times13^n\times59=12\,980\times13^n$

Exercice03 : (6pts)

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1) Déterminer : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$. Tels que : $a=720$ et $b=396$ (2pts)

2) Déterminer les diviseurs de 51. En déduire les entiers naturels entiers naturels x et y tel que :

$x^2-y^2=51$ b (2,5pts)

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose : $A=4n^2+12n+9$

Montrer que $A-1$ est divisible par 8. (1pts)

Corrigé : 1) $a=720$ et $b=396$

$a=720=2^4\times3^2\times5^1$ et $b=396=2^2\times3^2\times11^1$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b)=2^2\times3^2=36$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PPCM(a;b)=2^4\times3^2\times5\times11=7920$

2) On a : $51=3^1\times17^1$ donc : les diviseurs de 51 sont :1 ;3 ;17 ;51

$x^2-y^2=51$ Équivaut a $(x+y)(x-y)=51$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 51 et $x-y<x+y$

Par suite : $\begin{cases}x-y=1\\x+y=51\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=3\\x+y=17\end{cases}$ car $x-y\prec x+y$

Donc : $\begin{cases}x=26\\y=25\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=10\\y=7\end{cases}$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose : $A=4n^2+12n+9$ Montrons que : $A-1$ est divisible par 8.

$A-1=4n^2+12n+9-1=(4n^2+12n)+8=4n(n+3)+8$

Montrons que : $n(n+3)$ est un nombre pair

Si n est pair $n(n+3)$ est aussi pair

Si n est impair $n+3$ est pair et donc : $n(n+3)$ est aussi pair

Donc : dans tous les cas : $n(n+3)$ est un nombre pair

$A-1=4\times 2k+8=8k+8=8(k+1)=8k'$ avec $k'=k+1\in\mathbb{N}$

Par suite : $A-1$ est divisible par 8.

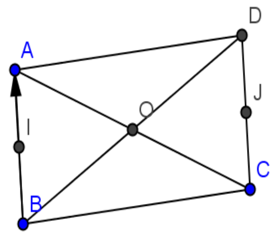
Exercice04 : (2pts)

Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I et J sont les milieux respectivement des segments $[AB]$ et $[CD]$

1) Montrer que : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (1pts)

2) En déduire que O est le milieu du segment $[IJ]$ (1pts)

Corrigé : 1)



On considère le triangle ABC on a I est le milieu du segment $[AB]$

Et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

De même : On considère le triangle ACD on a J est le milieu du segment $[AB]$ et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2) Pour montrer que O est le milieu du segment $[IJ]$ il suffit de montrer que : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$??

$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et puisque ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

On a donc : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\vec{O}$

Et par suite : O est le milieu du segment $[IJ]$

Exercice05 : (5pts)

ABC est un triangle.

Soient D et E deux points du plan tels que : $3\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{AB}$

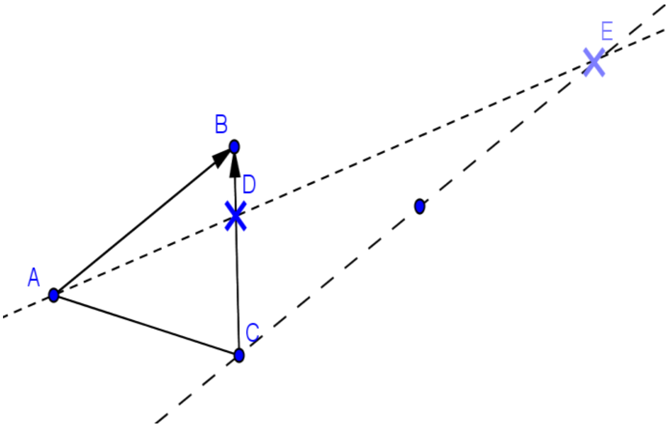
1) Faire une figure (0.5pts)

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (2pts)

2) b) En déduire que les points : A , E et D sont alignés. (1,5pts)

3) Montrer que : $AD\leq\frac{1}{3}(CE+AC)$ (1pts)

Corrigé : 1) la figure



2) a) On a: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

On a: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$ Donc : $\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}}$

2) b) On a: $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

Par suite les points : A , E et D sont alignés

3) On a: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AC}\right)\right\| = \left|\frac{1}{3}\right|\left\|\left(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AC}\right)\right\|$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| \le \frac{1}{3}\left(\left\|\overrightarrow{CE}\right\| + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|\right)$

Donc : $AD \le \frac{1}{3}\left(CE + AC\right)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices