Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : I

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (3pts)

Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

1) 77^3+33^3 2) 11^3-6^3 3) 731×4236 4) $24n+205$

5) $(2020)^2n^2+(2009)^2$ 6) $n^2+11n+13$

Corrigé : 1) 77^3+33^3

77^3 Est impaire car le produit de trois nombres impairs

33^3 Est impaire car le cube d'un nombre impair

77^3+33^3 C'est la somme de deux nombres impairs donc : c'est un nombre pair

2) 11^3-6^3

11^3 Est impaire car le produit de trois nombres impairs

6^3 Est paire car le cube d'un nombre pair

11^3-6^3 C'est la différence d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair

3) 731×4236

731 Est impaire et 4236 est un nombre pair

Donc : 731×4236 Est paire car c'est le produit d'un nombre impair et un nombre pair

4) $24n+205=2(12n+102)+1=2\times k+1$ avec $k=12n+102\in\mathbb{N}$

Donc $24n+205$ est un nombre impair

5) $(2020)^2n^2+(2009)^2$

$$(2020)^2n^2+(2009)^2=(2\times1010)^2n^2+(2\times1004+1)^2=2\times2\times(1010)^2n^2+(2\times1004+1)^2$$

On a : $2\times2\times(1010)^2n^2=2k$ avec $k=2\times(1010)^2n^2\in\mathbb{N}$

Donc : $2\times2\times(1010)^2n^2$ est un nombre pair

$2\times1004+1$ est un nombre impair donc : $(2\times1004+1)^2$ est un nombre impair

Car le carré d'un nombre impair

Par suite : $(2020)^2n^2+(2009)^2$ est un nombre impair car c'est la somme d'un nombre pair et un nombre impair

6) $n^2+11n+13$

$$n^2+11n+13=n^2+n+10n+12+1=n(n+1)+2(5n+6)+1$$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$n^2+11n+13=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$ Avec : $k''=k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2+11n+13$ est un nombre impair

Exercice02 : (5pts)

On considère les nombres : $a=1500$ et $b=840$

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b (1pts)

2) En déduire $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$. (1pts)

3) Déterminer le nombre de diviseurs des nombres de a (1pts)

4) Simplifier : $\frac{a}{b}$ et $\sqrt{a}$ (1pts)

5) Montrer que $15\times a$ est un carré parfait. (1pts)

Corrigé : 1) La décomposons des nombres a et b

$a=1500=2^2\times 3^1\times 5^3$ et $b=840=2^3\times 3^1\times 5^1\times 7^1$

2) Calculons le : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$.

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b)=2^2\times 3^1\times 5^1=60$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

$PPCM(a;b)=2^3\times 3^1\times 5^3\times 7^1=21000$

3) Déterminons le nombre de diviseurs des nombres a

On a : $a=1500=2^2\times 3^1\times 5^3$ donc : le nombre de diviseurs des nombres a est :

$(2+1)\times(1+1)\times(3+1)=3\times 2\times 4=24$

4) Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\frac{a}{b}$

Méthode1 : $\frac{a}{b}=\frac{2^2\times 3^1\times 5^3}{2^3\times 3^1\times 5^1\times 7^1}=\frac{5^2}{2\times 7}=\frac{25}{14}$

Méthode2 : $\frac{a}{b}=\frac{1500}{840}=\frac{1500\div 60}{840\div 60}=\frac{25}{14}$

Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\sqrt{a}$

$\sqrt{a}=\sqrt{2^2\times 3^1\times 5^3}=\sqrt{2^2\times 3^1\times 5^2\times 5^1}=2^1\times 5^1\sqrt{3^1\times 5^1}=10\sqrt{15}$

5)Montrons que le nombre $15\times a$ est un carré parfait.

$15\times a=3^1\times 5^1\times 2^2\times 3^1\times 5^3=2^2\times 3^2\times 5^4=\left(2^1\times 3^1\times 5^2\right)^2=(210)^2$

Donc : le nombre $15\times a$ est un carré parfait.

Exercice03 : (2,5pts)

Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 œufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.

Il souhaite vendre des assortiments d'œufs et de poissons de façon que :

• tous les paquets aient la même composition ;

• après mise en paquet, il ne reste ni œufs, ni poissons.

1) Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier. (1pts)

2) Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ? Dans ce cas, quelle sera la composition de chaque paquet ? (1,5pts)

Corrigé :

Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 oeufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.

1. Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.

Le nombre de paquets doit être un diviseur commun de 2 622 et 2 530, or on a :

$\frac{2622}{19}=138\in\mathbb{N}$

$\frac{2530}{19}\approx 133,2\notin\mathbb{N}$

L'entier 19 n'est donc pas un diviseur commun de 2 622 et 2 530.

Ce qui veut dire que l'on ne pas répartir les 2 530 poissons dans 19 paquets, il en reste 3 car :

2 530 = 19 × 133 + 3

2. Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ?
Quelle sera la composition de chaque paquet ?

• Le nombre de paquets qu'il peut réaliser est un diviseur commun à 2 622 et à 2 530. Puisque l'on cherche le plus grand, c'est donc leur PGCD.

• Calculons ce PGCD : $2622 = 2^1 \times 3^1 \times 19^1 \times 23^1$ **et** $2530 = 2^1 \times 5^1 \times 11^1 \times 23^1$

$PGCD(2622;2530) = 2^1 \times 23^1 = 46$

• On a par ailleurs

$\frac{2622}{46} = 57$ **et** $\frac{2530}{46} = 55$

Dans chacun des 46 paquets il y aura 57 œufs et 55 poissons

Exercice04 : (4,5pts)

1) Le nombre **437** est-il premier ? Justifier votre réponse ? (1pts)

2) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels tels que : $x^2 - y^2 = 437$ (2pts)

3) Montrer que le nombre $\boldsymbol{A}$ est divisible par le nombre **20** avec : $A = 9^{n+2} + 19 \times 9^n$; $n \in \mathbb{N}$ (1,5pts)

Corrigé : 1) 437 n'est pas premier car 19 divise 437 en effet : $437 = 19 \times 23$

2) On a : $437 = 19 \times 23$ donc : les diviseurs de 437 sont :1 ;19 ;23;437

$x^2 - y^2 = 437$ Équivaut a $(x+y)(x-y) = 437$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 437 et $x-y < x+y$

Par suite : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=437 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=19 \\ x+y=23 \end{cases}$ car $x-y \prec x+y$

Donc : $\begin{cases} x=219 \\ y=18 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=21 \\ y=2 \end{cases}$

Donc : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 437$ sont : $(21;2)$; $(219;18)$

3) $A = 9^{n+2} + 19 \times 9^n = 9^n\left(9^2 + 19\right) = 100 \times 9^n = 20 \times 5 \times 9^n$

$A = 20 \times \left(5 \times 9^n\right) = 20 \times k$ Avec $k = 5 \times 9^n \in \mathbb{N}$

Donc : $\boldsymbol{A}$ est divisible par le nombre **20**

Exercice05 : (5pts)

Soient O ; A ; B ; M ; N et P des points du plan tels que :

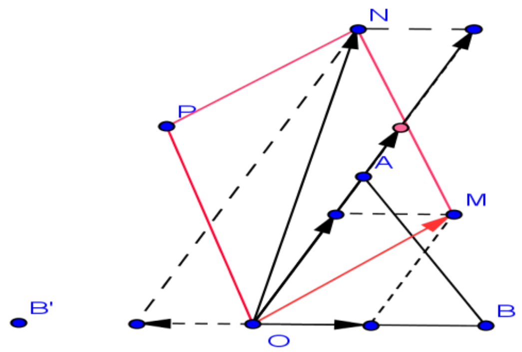
$\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{ON} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}$ Et $\overrightarrow{OP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

1) Faire une figure (1pts)

2) Montrer que : Les points : N , M et B sont alignés (2pts)

3) Montrer que : $OMNP$ est un parallélogramme (2pts)

Corrigé : 1) la figure



2) Montrons que Les points : N , M et B sont alignés ?

On a : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$

Donc : $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}$

Donc : $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

Et on a : $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{ON}$ donc : $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}$

Donc : $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{OA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

Donc : $3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{OA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ on a alors : $\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{BM}$.

Par suite : Les points : N , M et B sont alignés

3) Montrons que : $OMNP$ est un parallélogramme ?

On a : $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON}$ donc $\overrightarrow{PN}=-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}$

Donc : $\overrightarrow{PN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}-\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{PN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ alors : $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{OM}$

Cela signifie que : $OMNP$ est un parallélogramme

Exercice01 : (2,5pts)

Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$

1) 88^3+53^3 2) $54n+2001$ 3) $2024n+2026$ 4) $2n^2+4n+5$

5) $(2022)^2 n^2+(2023)^2$ 6) $n^2+99n+97$

Corrigé :1) 88^3+53^3

88^3 Est paire car le cube d'un nombre pair

53^3 Est impaire car le produit de trois nombres impairs

88^3+53^3 C'est la somme d'un nombre pair et un nombre impair donc : c'est un nombre impair

2) $54n+2001=2(27n+1000)+1=2\times k+1$ avec $k=27n+1000\in\mathbb{N}$

Donc $54n+2001$ est un nombre impair

3) $2024n+2026=2(1012n+1013)=2\times k$ avec $k=1012n+1013\in\mathbb{N}$

Donc $2024n+2026$ est un nombre pair

4) $2n^2+4n+5=2n^2+4n+4+1=2\left(n^2+2n+2\right)+1=2k+1$ avec $k=n^2+2n+2\in\mathbb{N}$

Donc $2n^2+4n+5$ est un nombre impair

5) $(2022)^2 n^2+(2023)^2$

$(2022)^2 n^2+(2023)^2=(2\times1011)^2 n^2+(2\times1011+1)^2=2\times2\times(1011)^2 n^2+(2\times1011+1)^2$

On a : $2\times2\times(1011)^2 n^2=2k$ avec $k=2\times(1011)^2 n^2\in\mathbb{N}$

Donc : $2\times2\times(1011)^2 n^2$ est un nombre pair

$2\times1011+1$ est un nombre impair donc : $(2\times1011+1)^2$ est un nombre impair

Car le carré d'un nombre impair

Par suite : $(2022)^2 n^2+(2023)^2$ est un nombre impair car c'est la somme d'un nombre pair et un nombre impair

6) $n^2+99n+97$

$n^2+99n+97=n^2+n+98n+96+1=n(n+1)+2(49n+48)+1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$n^2+99n+97=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$ Avec : $k''=k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2+99n+97$ est un nombre impair

Exercice02 : (5pts)

Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=7\times13^{n+2}-3\times13^n$; $b=3\times13^{n+1}+5\times13^n$

1) Montrer que : a est un multiple de 59 et que b un multiple de 11 (2pts)

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b (1pts)

3) En déduire $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$. (1pts)

Corrigé : 1) $a=7\times13^{n+2}-3\times13^n=7\times13^n\times13^2-3\times13^n=13^n\times\left(7\times13^2-3\right)$

$a=1180\times13^n=59\times20\times13^n=59\times k$ Avec $k=20\times13^n\in\mathbb{N}$

Donc a est un multiple de 59

On a : $b=3\times13^{n+1}+5\times13^n=3\times13^n\times13^1+5\times13^n=13^n(3\times13+5)=44\times13^n=11\times4\times13^n=11\times k$

Avec : $k=4\times13^n\in\mathbb{N}$ Donc b un multiple de 11

2) Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b

On a trouvé que : $a=59\times20\times13^n=2^2\times5^1\times13^n\times59^1$ car 59 premier

Et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b=11\times4\times13^n=2^2\times11\times13^n$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de b

3) Déduction du : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$.

On a : $a=2^2\times5^1\times13^n\times59^1$ et $b=2^2\times11\times13^n$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b : donc : $PGCD(a;b)=2^2\times13^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PPCM(a;b)=2^2\times5^1\times11\times13^n\times59=12\,980\times13^n$

Exercice03 : (6pts)

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1) Déterminer : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$. Tels que : $a=720$ et $b=396$ (2pts)

2) Déterminer les diviseurs de 51. En déduire les entiers naturels entiers naturels x et y tel que :

$x^2-y^2=51$ b (2,5pts)

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose : $A=4n^2+12n+9$

Montrer que $A-1$ est divisible par 8. (1pts)

Corrigé : 1) $a=720$ et $b=396$

$a=720=2^4\times3^2\times5^1$ et $b=396=2^2\times3^2\times11^1$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b)=2^2\times3^2=36$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PPCM(a;b)=2^4\times3^2\times5\times11=7920$

2) On a : $51=3^1\times17^1$ donc : les diviseurs de 51 sont :1 ;3 ;17 ;51

$x^2-y^2=51$ Équivaut a $(x+y)(x-y)=51$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 51 et $x-y<x+y$

Par suite : $\begin{cases}x-y=1\\x+y=51\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=3\\x+y=17\end{cases}$ car $x-y\prec x+y$

Donc : $\begin{cases}x=26\\y=25\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=10\\y=7\end{cases}$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose : $A=4n^2+12n+9$ Montrons que : $A-1$ est divisible par 8.

$A-1=4n^2+12n+9-1=\left(4n^2+12n\right)+8=4n(n+3)+8$

Montrons que : $n(n+3)$ est un nombre pair

Si n est pair $n(n+3)$ est aussi pair

Si n est impair $n+3$ est pair et donc : $n(n+3)$ est aussi pair

Donc : dans tous les cas : $n(n+3)$ est un nombre pair

$A-1=4\times2k+8=8k+8=8(k+1)=8k'$ avec $k'=k+1\in\mathbb{N}$

Par suite : $A-1$ est divisible par 8.

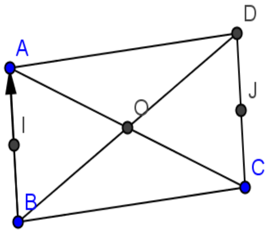
Exercice04 : (2pts)

Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I et J sont les milieux respectivement des segments $[AB]$ et $[CD]$

1) Montrer que : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (1pts)

2) En déduire que O est le milieu du segment $[IJ]$ (1pts)

Corrigé : 1)



On considère le triangle ABC on a I est le milieu du segment $[AB]$

Et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

De même : On considère le triangle ACD on a J est le milieu du segment $[AB]$ et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2) Pour montrer que O est le milieu du segment $[IJ]$ il suffit de montrer que : $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$??

$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et puisque ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

On a donc : $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{O}$

Et par suite : O est le milieu du segment $[IJ]$

Exercice05 : (5pts)

ABC est un triangle.

Soient D et E deux points du plan tels que : $3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$

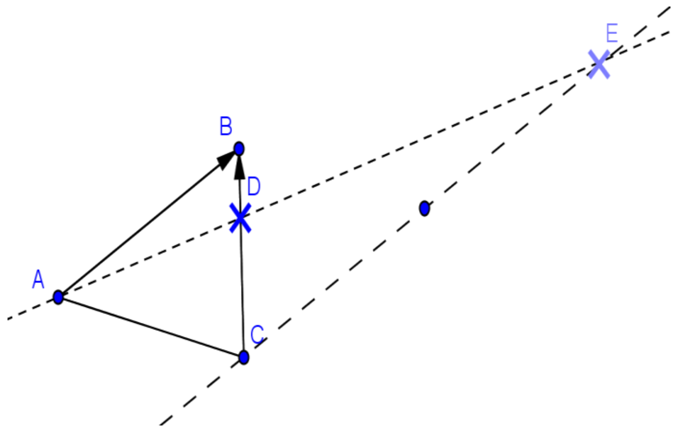
1) Faire une figure (0.5pts)

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (2pts)

2) b) En déduire que les points : A , E et D sont alignés. (1,5pts)

3) Montrer que : $AD \le \frac{1}{3}(CE + AC)$ (1pts)

Corrigé : 1) la figure



2) a) On a: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

On a: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$ Donc : $\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}}$

2) b) On a: $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

Par suite les points : A , E et D sont alignés

3) On a: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AC}\right)\right\| = \left|\frac{1}{3}\right|\left\|\left(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AC}\right)\right\|$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| \le \frac{1}{3}\left(\left\|\overrightarrow{CE}\right\| + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|\right)$

Donc : $AD \le \frac{1}{3}(CE + AC)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices