

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : J

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée : 2 heures

Exercice01 : (4pts)On considère les nombres : $a = 2520$ et $b = 256$ 1) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b (1pts)2) En déduire $PGCD(a;b)$ et $PPCM(a;b)$. (1pts)3) Simplifier : $\frac{a}{b}$; $\sqrt{a}$; $\sqrt{b}$ et $\sqrt{ab}$ (2pts)**Corrigé :** 1) La décomposons des nombres a et b

$$a = 2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 \text{ et } b = 256 = 2^8$$

2) Calculons le : $PGCD(a;b)$ et $PPCM(a;b)$.On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

$$\text{Donc : } PGCD(a;b) = 2^3 = 8$$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

$$PPCM(a;b) = 2^8 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 80640$$

3) Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} = \frac{2520}{256} = \frac{2520 \div 8}{256 \div 8} = \frac{315}{32}$$

Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\sqrt{a}$

$$\sqrt{a} = \sqrt{2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1} = \sqrt{2^2 \times 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1} = 2 \times 3 \sqrt{2^1 \times 5^1 \times 7^1} = 6\sqrt{70}$$

Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\sqrt{b}$

$$\sqrt{b} = \sqrt{2^8} = \sqrt{(2^4)^2} = 2^4 = 16$$

Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\sqrt{ab}$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} = 6\sqrt{70} \times 16 = 96\sqrt{70}$$

Exercice02 : (4pts)Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = 5 \times 19^{2n+1} - 23 \times 19^{2n}$; $b = 2 \times 19^{n+1} + 10 \times 19^n$ 1) Montrer que : a est un multiple de 72 et que b un multiple de 48 (2pts)2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b (1pts)3) En déduire $PGCD(a;b)$ et $PPCM(a;b)$. (1pts)

$$\text{Corrigé : 1) } a = 5 \times 19^{2n+1} - 23 \times 19^{2n} = 5 \times 19^{2n} \times 19^1 - 23 \times 19^{2n} = 19^{2n} \times (5 \times 19 - 23)$$

$$a = 72 \times 19^{2n} = 72 \times k \text{ Avec } k = 19^{2n} \in \mathbb{N}$$

Donc a est un multiple de 72

$$\text{On a : } b = 2 \times 19^{n+1} + 10 \times 19^n = 2 \times 19^n \times 19^1 + 10 \times 19^n = 19^n (2 \times 19 + 10) = 48 \times 19^n = 48 \times k$$

$$\text{Avec : } k = 19^n \in \mathbb{N}$$

Donc b un multiple de 482) Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b

$$\text{On a trouvé que : } a = 72 \times 19^{2n} = 2^3 \times 3^2 \times 19^{2n} \text{ car } 19 \text{ premier}$$

Et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b = 48 \times 19^n = 2^4 \times 3^1 \times 19^n$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de b

3) Dédution du : $PGCD(a;b)$ et $PPCM(a;b)$.

On a : $a = 2^3 \times 3^2 \times 19^{2n}$ et $b = 2^4 \times 3^1 \times 19^n$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b) = 2^3 \times 3^1 \times 19^n = 24 \times 19^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PPCM(a;b) = 2^4 \times 3^2 \times 19^{2n} = 144 \times 19^{2n}$

Exercice03 : (5,5pts)

1) Le nombre **437** est-il premier ? Justifier votre réponse ? (1pts)

2) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels tels que : $x^2 - y^2 = 437$ (2pts)

3) Montrer que le nombre **A** est divisible par le nombre **20** avec : $A = 9^{n+2} + 19 \times 9^n$; $n \in \mathbb{N}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$:

a) Montrer que le nombre $n \times (n+1)$ est pair. (1pts)

b) Etudier la parité des nombres : $B = n^2 + 5n + 5$ et $C = 11n^2 + n$ (1pts)

c) Dédurre une valeur de : $D = (n+2) \times (-1)^{11n^2+n} + (n-3) \times (-1)^{n^2+5n+5}$ (0.5pts)

Corrigé : 1) 437 n'est pas premier car 19 divise 437 en effet : $437 = 19 \times 23$

2) On a : $437 = 19 \times 23$ donc : les diviseurs de 437 sont : 1 ; 19 ; 23 ; 437

$x^2 - y^2 = 437$ Équivaut à $(x+y)(x-y) = 437$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 437 et $x-y < x+y$

Par suite : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=437 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=19 \\ x+y=23 \end{cases}$ car $x-y < x+y$

Donc : $\begin{cases} x=219 \\ y=18 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=21 \\ y=2 \end{cases}$

Donc : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 437$ sont : $(21;2)$; $(219;18)$

3) $A = 9^{n+2} + 19 \times 9^n = 9^n (9^2 + 19) = 100 \times 9^n = 20 \times 5 \times 9^n$

$A = 20 \times (5 \times 9^n) = 20 \times k$ Avec $k = 5 \times 9^n \in \mathbb{N}$

Donc : **A** est divisible par le nombre **20**

4) a) On va montrer que : $n \times (n+1)$ est un nombre pair

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

En effet : **1ère cas** : si n est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k$ par suite :

$n \times (n+1) = 2k \times (2k+1) = 2[k \times (2k+1)] = 2k'$ avec $k' = k \times (2k+1) \in \mathbb{N}$

Cela signifie que : $n \times (n+1)$ est pair

2ère cas : si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k+1$

Par suite : $n \times (n+1) = (2k+1) \times (2k+1+1)$

Donc : $n \times (n+1) = (2k+1) \times (2k+2) = 2(2k+1) \times (k+1)$

Donc : $n \times (n+1) = 2k'$ avec $k' = (2k+1) \times (k+1) \in \mathbb{N}$

Cela signifie que : $n \times (n+1)$ est pair

b)

• Etude de la parité du nombre : $B = n^2 + 5n + 5$

$$\text{On a : } B = n^2 + 5n + 5 = n^2 + n + 4n + 1 = n(n+1) + 2 \times (2n) + 1$$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc : } B = n^2 + 5n + 5 = 2k + 2 \times (2n) + 1$$

$$\text{Donc : } B = 2(k+2n) + 1 = 2k' + 1 \text{ avec } k' = k + 2n$$

Par suite : $B = n^2 + 5n + 5$ est un nombre impair.

• Etude de la parité du nombre : $C = 11n^2 + n$

$$\text{On a : } C = 11n^2 + n = n^2 + n + 10n^2 = n(n+1) + 10n^2$$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc : } C^2 = 2k + 2 \times (5n) = 2(k+5n) = 2k' \text{ avec } k' = k + 5n \in \mathbb{N}$$

Par suite : $C = 11n^2 + n$ est un nombre pair.

$$\text{c) Déduction de la valeur de : } D = (n+2) \times (-1)^{11n^2+n} + (n-3) \times (-1)^{n^2+5n+5}$$

$$\text{Puisque : } C = 11n^2 + n \text{ est un nombre pair alors : } (-1)^{11n^2+n} = 1$$

$$\text{Puisque : } B = n^2 + 5n + 5 \text{ est un nombre impair alors : } (-1)^{n^2+5n+5} = -1$$

$$\text{Donc : } D = (n+2) \times 1 + (n-3) \times (-1) = n+2 - n+3 = 5$$

Exercice04 : (1.5pts)

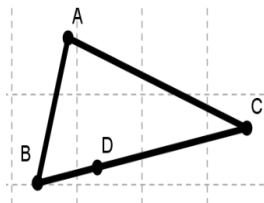
Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que : $7\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Montrer que Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et construire les points D

$$\text{Corrigé : } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{7}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{BD} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$$



Et par suite les vecteurs : $\overrightarrow{BD}$

Exercice05 : (5pts)

ABC est un triangle.

1) Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de [AC].

2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$ (1pts)

3) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (1pts)

b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AE}$ (0,5pts)

c) Que peut-on alors conclure ? (0,5pts)

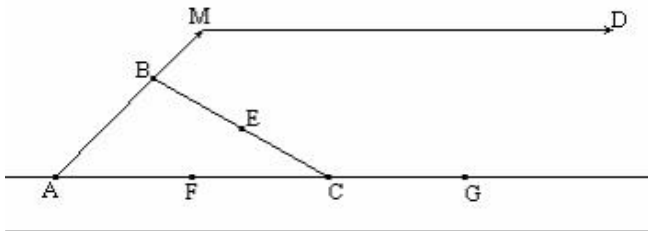
4) a) Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (0,5pts)

b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C et montrer que :

$$\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} \text{ puis que : } \overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ (1pts)}$$

c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG. (1pts)

Corrigé : 1)



2) Dans le triangle ABC, E est le milieu de [BC]

F est le milieu de [AC] Donc d'après le théorème des milieux : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{FE}$

3)a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ d'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{b) } 3\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \text{ d'où : } \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont alors colinéaires et les points A, D et E sont alignés.

$$4. \text{ a) } \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ nous donne } \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

On a alors $-2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (ceci nous permet alors de placer le point M).

b) G est le symétrique de F par rapport à C

D'où C est le milieu de [FG] et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{FC}$.

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ c) On a alors : } \overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

D'où : $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AM}$ et le quadrilatère AMDG est un parallélogramme.

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*

