Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : K

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan

Durée :2 heures

Exercice01 : (1pts)
Déterminer la valeur du nombre entier naturel n tel que : $544 = 2^n \times 17$
Corrigé :
Il suffit de faire la décomposition en produit de facteurs premiers les nombres 544
En décomposant en produit de facteurs premiers les nombres 544 on trouve : $544 = 2^5 \times 17^1$
Donc : $n = 5$

Exercice02 : (3,5pts)
Soit n un nombre entier naturel.
1) Soient : $x = n^2 - n + 1$ et $y = 6n^3 + 8$
a) Etudier la parité de x et y et déduire la parité de $x + y$ et $x \times y$ (2pts)
2) Montrer que le nombre $A = 4^{2n} + 16^{n+1} - 4^{2n+1}$ est multiple de 13. (1pts)
3) Montrer que 239 est un nombre premier (0.5pts)
Corrigé :
1)a) Etudions la parité de x et y
$x = n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$
On a : $n(n-1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite : $x = 2k + 1$
Donc : $x = n^2 - n + 1$ est un nombre impair
$y = 6n^3 + 8$
$y = 6n^3 + 8 = 2(3n^3 + 4) = 2k$ avec $k = 3n^3 + 4 \in \mathbb{N}$
Donc $y = 6n^3 + 8$ est un nombre pair
Etudions la parité de $x + y$: On a : x est un nombre impair et y est un nombre pair
Donc : $x + y$ est un nombre impair car c'est la somme d'un nombre pair et un nombre impair
Etudions la parité de $x \times y$
On a : x est un nombre impair et y est un nombre pair
Donc : $x \times y$ est un nombre pair car c'est le produit d'un nombre pair et un nombre impair
2) Montrons que le nombre $A = 4^{2n} + 16^{n+1} - 4^{2n+1}$ est un multiple de 13.
$A = 4^{2n} + 16^{n+1} - 4^{2n+1} = 4^{2n} + (4^2)^{n+1} - 4^{2n+1} = 4^{2n} + 4^{2n+2} - 4^{2n+1} = 4^{2n}(1 + 4^2 - 4^1) = 13 \times 4^{2n}$
3) Montrons que 239 est un nombre premier :On utilise la règle :
On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 239$
Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 239.
Donc 239 est premier

Exercice03 : (6,5pts) Les trois questions suivantes sont indépendantes.
1) Déterminer : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$. Tels que : $a = 220$ et $b = 156$ (1,5pts)
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $U = n^2 + 2023n + 8$
Montrer que $U - 1$ est un nombre entier naturel impair. (1,5pts)
3) a) Déterminer les diviseurs de 15. En déduire les entiers naturels entiers naturels x et y tel que :
$x^2 - y^2 = 15$ (2pts)
b) Déterminer tous les couples $(a;b)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :

$\begin{cases} a^2-b^2=540 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases} (S)$ (1,5pts)

Corrigé : 1) $a=220$ et $b=312$

$a=220=2^2\times5^1\times11^1$ et $b=312=2^3\times3^1\times13^1$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b)=2^2=4$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PPCM(a;b)=2^3\times3^1\times5^1\times11^1\times13^1=17160$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose : $U=n^2+2023n+8$

Montrons que $U-1$ est un nombre entier naturel impair.

$U-1=n^2+2023n+8-1=n^2+2023n+7$

$n^2+2023n+7=n^2+n+2022n+6+1=n(n+1)+2(2011n+3)+1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$A=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$ Avec : $k=2011n+3\in\mathbb{N}$ et $k''=k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $U-1$ est un nombre impair

3) a) On a :$15=3^1\times5^1$ donc : les diviseurs de 15 sont :1 ;3 ;5;15

$x^2-y^2=15$ Équivaut a $(x+y)(x-y)=15$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 15 et $x-y<x+y$

Par suite : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=5 \end{cases}$ car $x-y\prec x+y$

Donc : $\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a^2-b^2=540 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$;

$PGCD(a;b)=6$ donc :il existe un couple $(x;y)$ de nombres entiers naturels $a=6x$ et $b=6y$

$\begin{cases} a^2-b^2=540 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$ Donc : $(6x)^2-(6y)^2=540$

Donc : $36x^2-36y^2=540$ c'est-à-dire : $36(x^2-y^2)=540$ c'est-à-dire : $x^2-y^2=\frac{540}{36}=15$

D'après a) $\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ **et puisque :** $a=6x$ et $b=6y$ **donc:** $\begin{cases} x=48 \\ y=42 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=24 \\ y=6 \end{cases}$

Donc : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels **sont** :$(48;42)$ **;** $(24;6)$

Inversement : on vérifie que : $\begin{cases} 48^2-42^2=540 \\ PGCD(48;42)=6 \end{cases}$ et $\begin{cases} 24^2-6^2=540 \\ PGCD(24;6)=6 \end{cases}$

Par suite : les couples $(a;b)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (S) sont : $(48;42)$ **;** $(24;6)$

Exercice04 : (2pts) $n\in\mathbb{N}$

Déterminer toutes les valeurs possibles de l'entier naturel n tel que : $\frac{n+13}{n+3}$ soit un nombre entier naturel

Corrigé : $\frac{n+13}{n+3}=\frac{n+3+10}{n+3}=\frac{(n+3)+10}{n+3}=\frac{n+3}{n+3}+\frac{10}{n+3}=1+\frac{10}{n+3}$

Donc : $\frac{n+13}{n+3}=1+\frac{10}{n+3}$

$\frac{n+13}{n+3}$ Est un nombre entier naturel si et seulement si $\frac{10}{n+3}$

Si et seulement si $n+3$ est un diviseur de 10

Si et seulement si $n+3=1$ ou $n+3=2$ ou $n+3=5$ ou $n+3=10$

Si et seulement si $n=-2\notin\mathbb{N}$ ou $n=-1\notin\mathbb{N}$ ou $n=2\in\mathbb{N}$ ou $n=7\in\mathbb{N}$

Les valeurs possibles de l'entier naturel n tel que : $\frac{n+13}{n+3}$ soit un nombre entier naturel sont : $n=2$ ou $n=7$

Exercice05 : (2pts)

Soient : O, B, C trois points du plan et soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\vec{u}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)$ et $\vec{v}=\frac{1}{8}\overrightarrow{CB}$

Montrer que : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Corrigé : $\vec{u}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\times 8\vec{v}=4\vec{v}$

Donc : $\vec{u}=4\vec{v}$ par suite Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exercice06 : (5pts)

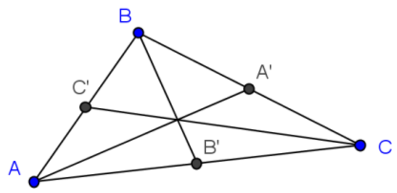
Soit ABC est un triangle. Les points : A' et B' et C' sont les milieux respectivement Des segments $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$

1) Faire une figure et vérifier que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$ (1pts)

2) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ et exprimer le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ en fonction De : $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ (2pts)

b) En déduire que : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ (2pts)

Corrigé : 1)



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}+\vec{0}$ Car $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$ (A' est le milieu du segment $[BC]$)

Par suite : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$ (1)

2) a) On a : $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ Donc : $\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (2)

On a : $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (3)

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$ (1) équivaut à: $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)$ Donc : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices