Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller N°1 : L

Sur : Arithmétique dans IN et Calcul vectoriel dans le plan et projection

Durée :2 heures

Exercice01 : (3,5pts)

1) Expliquer simplement pourquoi la fraction $\frac{140}{870}$ n'est pas une fraction irréductible. (0,5pts)

2) Décomposez les entiers 140 et 870 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs). (1pts)

3) Calculer le plus grand commun diviseur de 140 et 870. (1pts)

4) Rendre alors irréductible la fraction $\frac{140}{870}$ (1pts)

Corrigé : 1) $\frac{140}{870}$ n'est pas une fraction irréductible.

Le numérateur et le dénominateur sont pairs donc divisibles par 2. La fraction n'est donc pas irréductible.

2) Décomposez les entiers 140 et 870 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).

On obtient facilement :140 = $2^2 \times 5 \times 7$ et 870 = $2\times3\times5\times29$

3) Calculer le plus grand commun diviseur de 140 et 870.

140 = 10×7 et 870 = 10×3×29

Donc 10 est le plus grand diviseur commun de 140 et 870.

4) Rendre alors irréductible la fraction : $\frac{140}{870} = \frac{140 \div 10}{870 \div 10} = \frac{14}{87}$

Exercice02 : (3pts)

Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

1) $18n+4m+24$ 2) $8n^2+12nm+3$ 3) $(n+1)^2+7n^2$ 4) $5n^2+n$ 5) $4n^2+4n+1$ 6) $n^2+13n+17$

Solution : 1) $18n+4m+24 = 2(9n+2m+12) = 2k$

Avec : $k = 9n+2m+12$

Donc $18n+4m+24$ est un nombre pair

2) $8n^2+12nm+3 = 2(4n^2+4nm+1)+1 = 2k+1$

Avec : $k = 4n^2+4nm+1$

Donc $8n^2+12nm+3$ est un nombre impair

3) $(n+1)^2+7n^2 = n^2+2n+1+7n^2 = 8n^2+2n+1 = 2(4n^2+n)+1 = 2k+1$

Donc $(n+1)^2+7n^2$ est un nombre impair

4) $5n^2+n$ $n \in \mathbb{N}$

$5n^2+n = 4n^2+n^2+n = 4n^2+n(n+1) = 2\times 2n^2+2k = 2\times(2n^2+k) = 2\times k'$

Avec : $k' = 6n+8$ et $k'' = k+k'$

Car $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc $5n^2+n$ est un nombre pair

5) $4n^2+4n+1$ $n \in \mathbb{N}$

$4n^2+4n+1 = (2n)^2+2\times 2n\times 1+1^2 = (2n+1)^2$

Donc est un nombre impair car $2n+1$ est un nombre impair et le carré d'un nombre impair est impair

6) $n^2+13n+17$

$n^2+13n+17 = n^2+n+12n+16+1 = n(n+1)+2k'+1$

$= 2k+2k'+1 = 2(k+k')+1 = 2k''+1$

Car $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc $n^2+13n+17$ est un nombre impair

Exercice03 : (4pts)

Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=5^{n+2}-5^n$; $b=7^{n+2}-7^n$

1) Montrer que : a est un multiple de 8 et que b un multiple de 12 (2pts)

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b (1pts)

3) En déduire $PGCD(a;b)$ **et** $PPCM(a;b)$. (1pts)

Corrigé : On a : $a=5^{n+2}-5^n=5^n\times5^2-1\times5^n=5^n\left(5^2-1\right)=24\times5^n=8\times3\times5^n=8\times k$

Avec : $k=3\times5^n\in\mathbb{N}$

Donc a un multiple de 8

$b=7^{n+2}-7^n=7^n\times7^2-7^n\times1=7^n\times\left(7^2-1\right)$

$b=48\times7^n=12\times4\times7^n=12\times k$ Avec $k=4\times7^n\in\mathbb{N}$

Donc b est un multiple de 12

2) Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b

On a trouvé que : $a=8\times3\times5^n=2^3\times3^1\times5^n$

Et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b=48\times7^n=2^4\times3^1\times7^n$

Donc : $b=2^4\times3^1\times7^n$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de b

3) Déduction du : $PGCD(a;b)$ **et** $PPCM(a;b)$.

On a : $a=2^3\times3^1\times5^n$ et $b=2^4\times3^1\times7^n$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b)=2^3\times3^1=24$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PPCM(a;b)=2^4\times3^1\times5^n\times7^n=48\times35^n$

Exercice04 : (5pts)

Deux entiers naturels a et b premiers entre eux si $PGCD(a;b)=1$

1) Montrer que : si a et b premiers entre eux alors $2a+b$ et a sont premiers entre eux. (1pts)

2) Déterminer tous les nombres entiers naturels x et y tel que : $x^2-4y^2=12$ (1,5pts)

3) n un nombre entier naturel avec $n\geq4$.

Montrer que si 4 divise $n-3$ alors 8 divise n^2-1 (1pts)

4)Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrer que $n(n-2)(n-1))$ est multiple de 3. (1,5pts)

Indication : Etudier les cas : $n=3k$; $n=3k+1$ et $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

Corrigé :

1) Montrons que : si a et b premiers entre eux alors $2a+b$ et a sont premiers entre eux.

Supposons que a et b premiers entre eux donc : $PGCD(a;b)=1$

Donc : 1 est le seul diviseur commun de a et b

Posons : $PGCD(2a+b;b)=d$

Donc : d est un diviseur commun de a et $2a+b$

Donc : $2a+b=kd$ et $a=k'd$

Donc : $2a+b=kd$ et $2a=2k'd$

Donc : $2a+b-2a=kd-2k'd$ et $a=k'd$

Donc : $b=d\left(k-2k'\right)$ et $a=k'd$

Donc : d est un diviseur commun de a et b

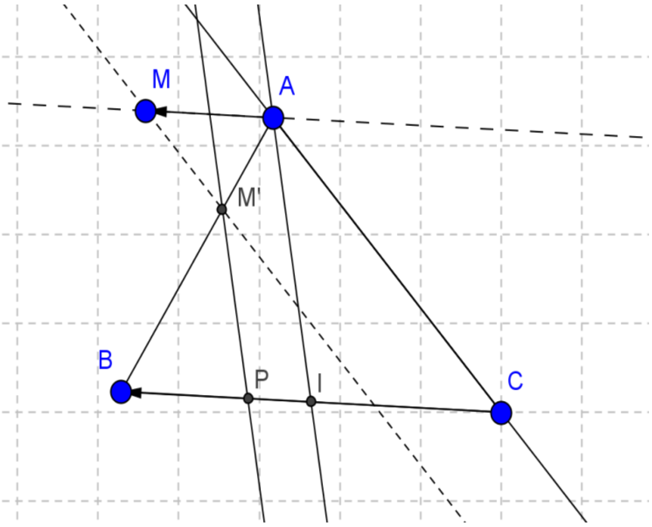
Donc : $d=1$ car1 est le seul diviseur commun de a et b
Donc : $PGCD(2a+b;b)=1$
Donc : $2a+b$ et a sont premiers entre eux.
2) Déterminons tous les nombres entiers naturels x et y tel que : $x^2-4y^2=12$
$x^2-4y^2=12$ Signifie que $x^2-(2y)^2=12$ Signifie que $(x-2y)(x+2y)=12$
Donc : $x-2y$ et $x+2y$ sont des diviseurs de 12
On a : $(x-2y)+(x+2y)=2x$ donc la somme est paire donc : $x-2y$ et $x+2y$ ont la même parité
Comme on a : $12=1\times 12=2\times 6=3\times 4$ et $x-2y$ et $x+2y$ ont la même parité ont la même parité et $x-2y<x+2y$
Alors : $\begin{cases} x-2y=2 \\ x+2y=6 \end{cases}$ C'est-à-dire : $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$
3) n un nombre entier naturel avec $n\geq 4$.
Supposons : 4 divise $n-3$ et montrons que : 8 divise n^2-1

On a : 4 divise $n-3$ donc : $n-3=4k$ avec : $k\in\mathbb{N}$
Donc : $n=4k+3$
Donc : $n^2-1=(4k+3)^2-1=16k^2+24k+9-1=16k^2+24k+8=8\left(2k^2+3k+1\right)=8k'$
Donc : 8 divise n^2-1
4)Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $n\neq 1$; Montrons que $n(n-2)(n-1))$ est multiple de 3.
Il y'a trois façons d'écrire n : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec : $k\in\mathbb{N}$
Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :
1ére cas : si $n=3k$: $n(n-2)(n-1)=3k(3k-2)(3k-1)=3\left(k(3k-2)(3k-1)\right)=3k'$ avec :
$k'=k(3k-2)(3k-1)\in\mathbb{N}$
Donc : $n(n-2)(n-1)$ est un multiple de 3 dans ce cas
2ére cas : si $n=3k+1$: $n(n-2)(n-1)=(3k+1)(3k+1-2)(3k+1-1)=3\left(k(3k+1)(3k-1)\right)=3k'$
Avec : $k'=k(3k+1)(3k-1)\in\mathbb{N}$
Donc : $n(n-2)(n-1)$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi
3ére cas : si $n=3k+2$
$n(n-2)(n-1)=(3k+2)(3k+2-2)(3k+2-1)=3\left(k(3k+2)(3k+1)\right)=3k'$
Avec : $k'=k(3k+2)(3k+1)\in\mathbb{N}$
Donc : Le nombre : $n(n-2)(n-1)$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi.
Par conséquent : selon le raisonnement par
Disjonction des cas le nombre $n(n-2)(n-1)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Exercice05 : (5pts)
Soient ABC un triangle et M
Un point défini par : $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AM}$
2) Soit le point M' le projeté de M sur la droite (AB) parallèlement à (AC)
1) Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. (2pts)
Et en déduire que $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et P le point tel que : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

a) Montrer que $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ (1,5pts)

b) En déduire que $(AI)\parallel(PM')$. (1,5pts)

Corrigé : 1) La figure



$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AM}$ Équivaut à : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Soit: P la projection sur (AB) parallèlement à (AC).

On a $A\in(AB)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A)=A$.

On a $B\in(AB)$ donc B est invariante par la projection P donc $P(B)=B$.

On a aussi : $P(C)=A$ et $P(M)=M'$

Et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2) a) On a I le milieu du segment $[BC]$.

Équivaut à : $2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{CB}$ et on a : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

Donc : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times2\overrightarrow{IB}$

Donc : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

b) On a : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ donc : $IP=\frac{1}{3}IB$

Équivaut à : $\frac{IP}{IB}=\frac{1}{3}$ (1)

De même on a : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc : $AM'=\frac{1}{3}AB$ Équivaut à : $\frac{AM'}{AB}=\frac{1}{3}$ (2)

De : 1 et 2 on a $\frac{IP}{IB}=\frac{AM'}{AB}$ et d'après le théorème de Thalès réciproque on a Donc : $(AI)\parallel(PM')$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices