Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°2 : F sur les leçons suivantes :

- L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles
- L'ordre dans : $\mathbb{R}$
- La droite dans le plan

Exercice01 : $(2pts)$ Soient $A=\left\{-\frac{28}{5},-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},2,\frac{5}{2},49\right\}$, $B=\left\{-3,3,\frac{147}{3}\right\}$, $C=\left\{\sqrt{3},\frac{5}{2},49\right\}$ trois ensembles.

Déterminez $A\cap B;\ A\cap C;\ A\cup B;\ A\cup C;\ A\cap\mathbb{N};\ A\cap\mathbb{Z};\ A\cap\mathbb{Q};\ A\cap\mathbb{R}.$

Corrigé : 1) $A\cap B=\{-3\}$ $A\cap C=\left\{\sqrt{3},2,\frac{5}{2},49\right\}$ $A\cup B=\left\{-\frac{28}{5},-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},2,3,\frac{5}{2},49\right\}$

$A\cup C=\left\{-\frac{28}{5},-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},2,3,\frac{5}{2},49\right\}$; $A\cap\mathbb{N}=\{2,49\}$; $A\cap\mathbb{Z}=\{-3,2,49\}$; $A\cap\mathbb{Q}=\left\{-\frac{28}{5},-3,,2,\frac{5}{2},49\right\}$

$A\cap\mathbb{R}=\left\{-\frac{28}{5},-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},2,\frac{5}{2},49\right\}$

Exercice02 : $4\,pts(1\,pts+1\,pts+1\,pts+1\,pts)$

On pose : $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ et $B=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

1) Montrer que : $A\times B=2$

2) On pose : $X=A+B$ et $Y=A-B$ Calculer : X^2 et Y^2

3) En déduire une écriture simple de X et Y

4) En déduire une écriture simple de A et B

Corrigé : $A\times B=\sqrt{4+2\sqrt{3}}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}$

$A\times B=\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16-12}=\sqrt{4}=2$

2) On a : $X=A+B$ et $Y=A-B$

Donc : $X^2=(A+B)^2=A^2+B^2+2A\times B=A^2+B^2+2\times2$

Donc ; $X^2=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}+2\times2=12$ et : $Y^2=(A-B)^2=A^2+B^2-2A\times B=A^2+B^2-2\times2$

Donc : $Y^2=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-4=4$

3) Déduction d'une écriture simple de X et Y :

On a : $X^2=12$ donc : $X=\sqrt{12}$ ou $X=-\sqrt{12}$

Or on sait que : $X=A+B$ donc X est la somme de deux nombres positifs donc c'est un nombre positif ; Donc : $X=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$

On a aussi : $Y^2=4$ et on Remarque que : $A>B$ donc : Y est positif par suite : $Y=\sqrt{4}=2$

4) Déduire une écriture simple de A et B :

On a : $\begin{cases}X=2\sqrt{3}\\Y=2\end{cases}$ équivaut à : $\begin{cases}A+B=2\sqrt{3}\\A-B=2\end{cases}$

En faisant la somme membre à membre les deux équations : On trouve : $2A=2+2\sqrt{3}$

Donc : $A=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}=1+\sqrt{3}$ et on a : $A+B=2\sqrt{3}$ donc:

$B=2\sqrt{3}-A$ Equivaut à : $B=2\sqrt{3}-1-\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$

Exercice03 : $5,5\,pts(1,5\,pts+2\,pts+2\,pts)$

1) Simplifier : $E=\sqrt{\dfrac{4}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2}}}-\sqrt{\dfrac{4}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}}}$

2) Soient x et y deux réels tels que : $5<x<y<8$ et $x+y=12$

Simplifier : $F=\sqrt{(5-x)^{2}}+|10-x|+\sqrt{(x-y)^{2}}+|2y-16|$

3) Soient x et y deux réels tels que : $x\in]-1;2[$ et $y\in]-5;-3[$

Simplifier : $G=2|3x+3|-|2y|+5|y+3|-3|y-2x|$

Corrigé : 1) Simplifions : $E=\sqrt{\dfrac{4}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2}}}-\sqrt{\dfrac{4}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}}}$

$$E=\sqrt{\frac{2^2}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2}}}-\sqrt{\frac{2^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}}}=\left|\frac{2}{1-\sqrt{2}}\right|-\left|\frac{2}{1+\sqrt{2}}\right|=\frac{2}{\left|1-\sqrt{2}\right|}-\frac{2}{\left|1+\sqrt{2}\right|}$$

$E=\dfrac{2}{-\left(1-\sqrt{2}\right)}-\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$ Car : $1-\sqrt{2}<0$ $(1^2=1\ ;\ \sqrt{2}^2=2)$ et $1+\sqrt{2}>0$

$$E=\frac{-2}{1-\sqrt{2}}-\frac{2}{1+\sqrt{2}}=\frac{-2\left(1+\sqrt{2}\right)-2\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-4}{1^2-\sqrt{2}^2}=\frac{-4}{1-2}=\boxed{4}$$

1) Simplifions : $F=\sqrt{(5-x)^{2}}+|10-x|+\sqrt{(x-y)^{2}}+|2y-16|$

Soient x et y deux réels tels que : $5<x<y<8$

$F=|5-x|+|10-x|+|x-y|+|2y-16|$

On a : $5<x<y<8$ alors $x<y$ et donc : $x-y<0$

On a : $5<x<y<8$ alors $5<x$ et donc : $5-x<0$

On a : $5<x<y<8$ et $8<10$ alors $x<10$ et donc : $10-x>0$

On a : $5<x<y<8$ alors $y<8$ et donc : $2y<16$ alors : $2y-16<0$

Donc : $F=-(5-x)+(10-x)-(x-y)-(2y-16)$

Donc : $F=x-5+10-x-x+y-2y+16=-x+21-y$

Donc : $F=-(x+y)+21=-12+21=9$ car $x+y=12$; Donc : $\boxed{F=9}$

3) Simplifions : $G=2|3x+3|-|2y|+5|y+3|-3|y-2x|$

Soient x et y deux réels tels que : $x\in]-1;2[$ et $y\in]-5;-3[$

On a : $x\in]-1;2[$ donc : $-1<x<2$ et donc : $-3<3x<6$ et par suite : $0<3x+3<9$

Donc : $0<3x+3$ et alors : $|3x+3|=3x+3$: (1)

On a : $y\in]-5;-3[$ donc : $-5<y<-3$ et donc : $-10<2y<-6$ par suite : $2y<0$

Et alors : $|2y|=-2y$: (2)

On a : $-5<y<-3$ donc : $-2<y+3<0$ par suite : $y+3<0$ et alors : $|y+3|=-(y+3)$: (3)

On a : $-1<x<2$ donc : $-4<-2x<2$ et $-5<y<-3$ et on a : $y-2x=y+(-2x)$

Donc : $-4+(-5)<y-2x<-3+2$

Donc : $-9<y-2x<-1$ par suite : $|y-2x|=-(y-2x)=-y+2x$: (4)

D'après (1); (2) ; (3) et (4) on obtient : $G=2|3x+3|-|2y|+5|y+3|-3|y-2x|$

$G=2(3x+3)+2y-5(y+3)+3(y-2x)$

Donc : $G=6x+6+2y-5y-15+3y-6x$ Par suite : $G=-9$

Exercice04 : $3,5\,pts(0.5\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts)$

Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

$A=12x^2-6x$; $B=(4x-2)(3x-1)-9x^2+1$; $C=(x-3)(2x-1)+x^3-27$

Corrigé : $A=12x^2-6x=6x\times2x-6x\times1$ donc $6x$ facteur commun

Donc : $A=12x^2-6x=6x(2x-1)$

$B=(4x-2)(3x-1)-9x^2+1$

$B=(4x-2)(3x-1)-(9x^2-1)=(4x-2)(3x-1)-\left((3x)^2-1^2\right)$ mais $(3x)^2-1^2$ est du type : a^2-b^2

Donc : $B=(4x-2)(3x-1)-(3x-1)(3x+1)$

$C=(4x-2)(3x-1)-(3x-1)(3x+1)$ On a : $3x-1$ facteur commun

Donc : $B=(3x-1)\left[(4x-2)-(3x+1)\right]=(3x-1)(4x-2-3x-1)=(3x-1)(x-3)$

$C=(x-3)(2x-1)+x^3-27$

$C=(x-3)(2x-1)+x^3-3^3=(x-3)(2x-1)+(x-3)(x^2+3x+3^2)$

$C=(x-3)(2x-1+x^2+3x+9)=(x-3)(x^2+5x+8)$

Exercice05 : $5\,pts(1\,pts+1\,pts+0.5\,pts+1\,pts+1,5\,pts)$

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soient : $A(-2;-1)$ et $B\left(\frac{1}{2};-2\right)$.

1)a) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

b) Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses.

2) Soit (Δ) la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-1\\y=4t-4\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Vérifier que : $B\in(\Delta)$.

b) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) .

3) Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases}4x-3y-8\le0\\2x+5y+9\ge0\\y\le0\end{cases}$.

Solution :1) a) (AB): $ax+by+c=0$ on a : $\overrightarrow{AB}\left(\frac{5}{2};-1\right)$ un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}(-b;a)$

Donc : $a=-1$ et $b=-\frac{5}{2}$ et par suite l'équation devient (AB) : $-x-\frac{5}{2}y+c=0$.

Or on sait que : A (–2,-1) et $A\in(AB)$ donc : $-(-2)-\frac{5}{2}(-1)+c=0$ c'est-à-dire : $c=-\frac{9}{2}$

Par suite (AB): $-x-\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}=0$

On multiplie cette équation par : -2 on trouve (AB): $2x+5y+9=0$

b) Soit $I(x;y)$ les coordonnées du point I d'intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses

Donc il vérifie le système suivant : $\begin{cases} y=0 \\ 2x+5y+9=0 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} y=0 \\ 2x+5\times 0+9=0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} y=0 \\ x=-\frac{9}{2} \end{cases}$ par suite : $I\left(-\frac{9}{2};0\right)$

2)a) On a $B\left(\frac{1}{2};-2\right)$ et (Δ) $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=4t-4 \end{cases}$ ①

$B\in(\Delta)$ S'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} \frac{1}{2}=3t-1 \\ -2=4t-4 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}=3t-1 \\ -2=4t-4 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$ donc $B\in(\Delta)$ pour : $t=\frac{1}{2}$

b) Une équation cartésienne de la droite (Δ) ?

On a : (Δ) $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=4t-4 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x+1=3t \\ y+4=4t \end{cases}$ donc : $\begin{cases} 4(x+1)=12t \\ 3(y+4)=12t \end{cases}$ Donc : $4(x+1)=3(y+4)$

Donc : $4x+4-3y-12=0$ c'est-à-dire : Par suite : une équation cartésienne de la droite (Δ) est :
$(\Delta): 4x-3y-8=0$

3)Résolution graphique du système :

$\begin{cases} 4x-3y-8\le 0 \\ 2x+5y+9\ge 0 \\ y\le 0 \end{cases}$

Dans un premier temps : des inéquations précédentes on en déduit des équations de droites :

On a : $(\Delta): 4x-3y-8=0$ est droite qui passe par : $B\left(\frac{1}{2};-2\right)$ et par $C(-1;-4)$

Et (AB): $2x+5y+9=0$ et on pose : $(D): y=0$

On représente ces droites :

a) Pour la droite $(\Delta): 4x-3y-8=0$: par exemple pour $O(0;0)$ On a $4\times 0-3\times 0-8\le 0$

Équivalent à : $-8\le 0$

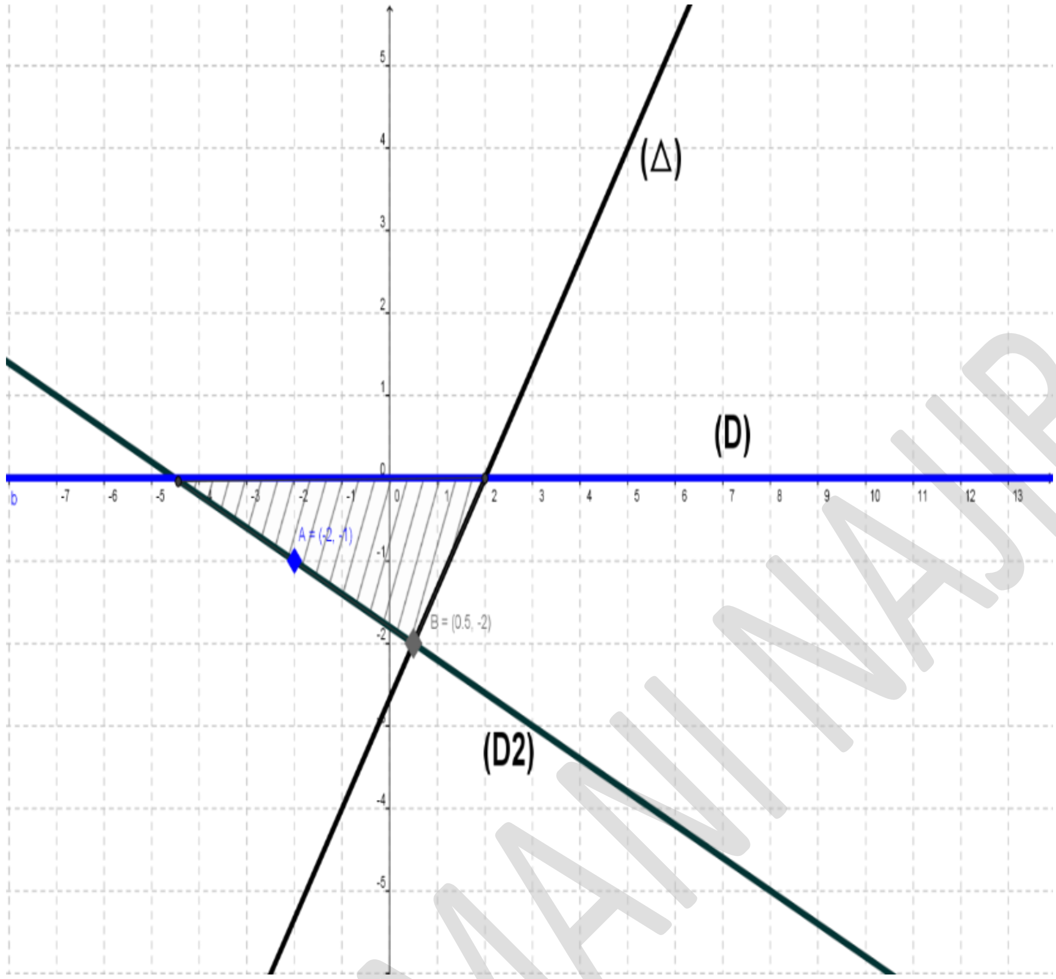
Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $4x-3y-8\le 0$

b) Pour la droite (AB): $2x+5y+9=0$ par exemple pour $O(0;0)$

On a $2\times 0+5\times 0+9\ge 0$ Équivalent à : $9\ge 0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $2x+5y+9\ge 0$

b) Pour la droite $(D): y=0$:Par exemple pour $E(0;1)$ On a $1\le 0$ donc : les coordonnes $E(0;1)$ vérifie l'inéquation. $y\le 0$



Donc :les Solutions du système est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du plan hachuré

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien