Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°2 : G sur les leçons suivantes :

- **L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles**
- **L'ordre dans : $\mathbb{R}$**
- **La droite dans le plan**

Exercice01 : $3pts(1\,pts+1\,pts+1\,pts)$

$x\in\mathbb{R}$; Développer et calculer et simplifier :

$A=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$; $B=\left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\right]^2$; $C=\left(2\sqrt{2}-3\right)^3$

Corrigé : $A=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\left[\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]-\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]$

$A=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^2=2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=4\sqrt{6}$

$B=\left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\right]^2=\left[\left(\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2\right)\right]^2=\left(7-5\right)^2=2^2=4$

$C=\left(2\sqrt{2}-3\right)^3=\left(2\sqrt{2}\right)^3-3\times\left(2\sqrt{2}\right)^2\times3+3\times2\sqrt{2}\times3^2-3^3=16\sqrt{2}-72+54\sqrt{2}-27$

$C=70\sqrt{2}-99$

Exercice02 : $(1pts)$: Factoriser l'expression suivante : $x\in\mathbb{R}$

$D=(x-3)(2x-1)+x^3-27$

Corrigé : $D=(x-3)(2x-1)+x^3-27$

$D=(x-3)(2x-1)+x^3-3^3=(x-3)(2x-1)+(x-3)\left(x^2+3x+3^2\right)$

$D=(x-3)\left(2x-1+x^2+3x+9\right)=(x-3)\left(x^2+5x+8\right)$

Exercice03 : $(1pts)$

Soit : $n\in\mathbb{N}$; Montrer que $\dfrac{2^{n+1}\times3^{n+2}-18}{2^n\times3^{n+2}-9}\in\mathbb{N}$.

Corrigé : Montrons que $\dfrac{2^{n+1}\times3^{n+2}-18}{2^n\times3^{n+2}-9}\in\mathbb{N}$

$$\frac{2^{n+1}\times3^{n+2}-18}{2^n\times3^{n+2}-9}=\frac{2^{n+1}\times3^{n+2}-2^1\times3^2}{2^n\times3^{n+2}-3^2}=\frac{2\times3^2\left(2^n\times3^n-1\right)}{3^2\left(2^n\times3^n-1\right)}=2\in\mathbb{N}$$

Exercice04 : $6,5pts(1,5\,pts+1\,pts+1.5\,pts+3\,pts)$

1) Soient x et y deux réels tels que : $x\in[-2;5]$ et $y\in[-3;-1]$

Simplifier : $E=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

2) Simplifier les nombres : $F=\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}$

3) Soient a et b deux réels tels que : $a\in\mathbb{R}^-$ et $b\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

Simplifier : $G=\sqrt{(2b-1)^2}$; $H=\sqrt{(a-2)^2}$

4) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $|5x+2|=8$ b) $|-2x+1|=-1$ c) $|2x+1|=|3x-4|$ d) $|2x-3|\le1$ e) $|6x+11|\ge\dfrac{1}{6}$

Corrigé :1) Soient x et y deux réels tels que : $x\in[-2;5]$ et $y\in[-3;-1]$

Simplifions : $E=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

$E=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

On a : $x\in[-2;5]$ donc : $-2\le x\le 5$

Donc : $-4\le 2x\le 10$ alors : $3\le 2x+7\le 17$ c'est-à-dire : $2x+7>0$ Donc : $|2x+7|=2x+7$

On a : $y\in[-3;-1]$ donc : $-3\le y\le -1$ alors : $-9\le 3y\le -3$ c'est-à-dire : $3y<0$

Donc : $|3y|=-3y$

On a : $y\in[-3;-1]$ donc : $-3\le y\le -1$ alors : $5\le y+8\le 7$ c'est-à-dire : $y+8>0$

Donc : $|y+8|=y+8$

On a : $-3\le y\le -1$ alors : $-6\le 2y\le -2$ et $-5\le -x\le 2$

Alors : $-6+(-5)\le 2y+(-x)\le -2+2$ c'est-à-dire : $-11\le 2y-x\le 0$ donc : $2y-x\le 0$

Donc : $E=2(2x+7)+3y+2(y+8)+2y-x$

Donc : $E=4x+14+3y+2y+16+2y-x$

Donc : $\boxed{E=3x+7y+30}$

2) Simplifions : $F=\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}$

$F=\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}=\left|5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right|$

On a : $\left(5\sqrt{7}\right)^2=175$; $\left(59\sqrt{3}\right)^2=10443$ donc : $5\sqrt{7}-59\sqrt{3}<0$

Alors : $F=-\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)=59\sqrt{3}-5\sqrt{7}$

3) Soient a et b deux réels tels que : $a\in\mathbb{R}^-$ et $b\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Simplifions : $G=\sqrt{(2b-1)^2}$

$G=\sqrt{(2b-1)^2}=|2b-1|$ Or on a : $b\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

$b\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ Signifie que : $0\le b\le\frac{1}{2}$

Donc : $0\le 2b\le 1$ c'est-à-dire : $-1\le 2b-1\le 0$

Donc : $G=|2b-1|=-(2b-1)=1-2b$

Simplifions : $H=\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|$

$a\in\mathbb{R}^-$ Signifie que : $a\le 0$ c'est-à-dire : $a-2\le -2$

Donc : $a-2\le 0$

Donc : $H=|a-2|=-(a-2)=2-a$

4) a) Résolution de l'équation : $|5x+2|=8$

On a les équivalences suivantes :

$|5x+2|=8$ Signifie que : $5x+2=8$ ou $5x+2=-8$

Signifie que : $5x=6$ ou $5x=-10$

Signifie que : $x=\frac{6}{5}$ ou $x=-2$ Donc : $S=\left\{-2;\frac{6}{5}\right\}$

b) Résolution de l'équation : $|-2x+1|=-1$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative

Donc : $S=\varnothing$

c) Résolution de l'équation : $|2x+1|=|3x-4|$

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|2x+1|=|3x-4|$ Signifie que : $2x+1=3x-4$ ou $2x+1=-(3x-4)$

Signifie que : $-x=-5$ ou $2x+1=-3x+4$

Signifie que : $x=5$ ou $5x=3$

Signifie que : $x=5$ ou $x=\frac{3}{5}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{5};5\right\}$

d) Résolution de l'inéquation : $|2x-3|\leq 1$

Règle : $|x-a|\leq r$ est équivalente à : $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|2x-3|\leq 1$ Signifie que : $-1\leq 2x-3\leq 1$

Signifie que : $-1+3\leq 2x-3+3\leq 1+3$

Signifie que : $2\leq 2x\leq 4$

Signifie que : $1\leq x\leq 2$

Donc : $S=[1;2]$

e) Résolution de l'inéquation : $|6x+11|\geq\frac{1}{6}$

Règle : $|x-a|>r$ est équivalente à : $x-a\geq r$ ou $x-a\leq -r$ avec $r>0$

$|6x+11|\geq\frac{1}{6}$ Signifie que : $6x+11\geq\frac{1}{6}$ ou $6x+11\leq-\frac{1}{6}$

Signifie que : $6x\geq\frac{1}{6}-11$ ou $6x\leq-\frac{1}{6}-11$

Signifie que : $6x\geq-\frac{65}{6}$ ou $6x\leq-\frac{67}{6}$

Signifie que : $x\geq-\frac{65}{36}$ ou $x\leq-\frac{67}{36}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{67}{36}\right]\cup\left[-\frac{65}{36};+\infty\right[$

Exercice05 : $2,5\,pts(1\,pts+1\,pts+0,5\,pts)$

1) Vérifier que $17^2<300<18^2$ et en déduire que ; $1,7<\sqrt{3}<1,8$

2) Sachant que : $2,2<\sqrt{5}<2,3$.

a) Montrer que : $0,14<\sqrt{15}-2\sqrt{3}<0,74$

b) Déterminer une valeur approchée par défaut et par excès de $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés

Corrigé : 1) On a $17^2=289$ et $18^2=324$ donc : $17^2<300<18^2$

C'est-à-dire : $\sqrt{17^2}<\sqrt{300}<\sqrt{18^2}$

Donc : $\sqrt{17^2}<\sqrt{3\times100}<\sqrt{18^2}$

C'est-à-dire : $17 < \sqrt{3}\times 10 < 18$

Donc : $17\times\frac{1}{10} < \sqrt{3}\times 10\times\frac{1}{10} < 18\times\frac{1}{10}$

Cela équivaut à : $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

2) a) $\sqrt{15}-2\sqrt{3}=\sqrt{15}+\left(-2\sqrt{3}\right)$

On a $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ donc : $3,4 < 2\sqrt{3} < 3,6$ et $3,74 < \sqrt{3}\sqrt{5} < 4,14$

Donc : $-3,6 < -2\sqrt{3} < -3,4$ et $3,74 < \sqrt{15} < 4,14$

Donc : $0,14 < \sqrt{15}+\left(-2\sqrt{3}\right) < 0,74$ Donc : $\boxed{0,14 < \sqrt{15}-2\sqrt{3} < 0,74}$

b) Déterminons une valeur approchée par défaut et par excès de $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés

On a : $0,14 < \sqrt{15}-2\sqrt{3} < 0,74$ et $0,74-0,14=0,6=6\times 10^{-1}$

Une valeur approchée par défaut de $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés est : $0,14$

Une valeur approchée par excès de $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés est : $0,74$

Exercice06 : $5,5 pts (1 pts + 0,5 pts + 0,5 pts + 0,5 pts + 0,5 pts + 1 pts + 1 pts + 0,5 pts)$

Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ on considère les points suivants :

$A(-7;2)$; $B(-1;-6)$; $C(8;-5)$ et $E(-4;0)$

1) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ)

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

c) Montrer que : $B\in(\Delta)$

d) Déterminer les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des ordonnées.

e) Déterminer les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des abscisses.

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $(D)\begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D)

b) Montrer que les droites (D) et (Δ) sont sécantes, puis déterminer leurs points d'intersection.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') parallèles a (D) passant par $A(-7;2)$

Solution :1) a) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

a) On cherche une équation cartésienne de la droite (Δ)

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(\Delta)$

$M(x;y)\in(\Delta)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+7;y-2)$ et $\vec{u}(3;-4)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+7 & 3 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-4(x+7)-3(y-2)=0$

Équivaut à : $-4x-28-3y+6=0$ Équivaut à : $-4x-3y-22=0$

Équivaut à : $-(4x+3y+22)=0$ Équivaut à : $4x+3y+22=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $(\Delta):4x+3y+22=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite (Δ) s'écrit sous la forme : (Δ) $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(3;-4)$

Donc : $a=-4$ et $b=-3$ alors l'équation devient : (D) $-4x-3y+c=0$

Or on sait que $A(-7;2)$ et $A\in(\Delta)$

Donc : $-4\times(-7)-3\times2+c=0$ c'est-à-dire : $28-6+c=0$ donc : $c=-22$

Par suite : $(\Delta):-4x-3y-22=0$ ou $(\Delta):4x+3y+22=0$

b) On cherche une représentation paramétrique de la droite (Δ)

On a : la droite (Δ) passe par $A(-7;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

Donc : une représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-7\\y=-4t+2\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

c) Montrons que : $B\in(\Delta)$

Méthode1 : On a : $(\Delta):4x+3y+22=0$ et $B(-1;-6)$

Alors : $4x_B+3y_B+22=4\times(-1)+3\times(-6)+22$

$=-4-18+22$

$=0$ Par suite : $B\in(\Delta)$

Méthode2 : On a : : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-7\\y=-4t+2\end{cases}$ et $B(-1;-6)$ alors : $\begin{cases}-1=3t-7\\-6=-4t+2\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}6=3t\\-8=-4t\end{cases}$ signifie que : $\begin{cases}t=2\\t=2\end{cases}$ (On trouve la même valeur pour $t\in\mathbb{R}$)

Par suite : $B\in(\Delta)$

Remarque : si on trouve des valeurs différentes pour t alors le point n'appartient pas a la droite

d) On cherche les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY).

Méthode1 : On a : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-7\\y=-4t+2\end{cases}$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\y=-4t+2\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}3t-7=0\\y=-4t+2\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}t=\frac{7}{3}\\y=-4t+2\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}t=\frac{7}{3}\\y=-4\times\frac{7}{3}+2=-\frac{22}{3}\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}x=0\\y=-\frac{22}{3}\end{cases}$

par suite : $F\left(0;-\frac{22}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

Méthode2 : On a : $(\Delta):4x+3y+22=0$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\4x+3y+22=0\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\4\times0+3y+22=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 3y=-22 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{22}{3} \end{cases}$

Par suite : $F\left(0;-\frac{22}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

e) On cherche les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX).

Méthode1 : On a : $(\Delta)\ \begin{cases} x=3t-7 \\ y=-4t+2 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=3t-7 \\ y=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=3t-7 \\ -4t+2=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=3t-7 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=3\times\frac{1}{2}-7=-\frac{11}{2} \\ y=0 \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\frac{11}{2};0\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

Méthode2 : On a : $(\Delta):4x+3y+22=0$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 4x+3y+22=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 4x+3\times0+22=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 4x=-22 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ x=-\frac{22}{4}=-\frac{11}{2} \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\frac{11}{2};0\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $(D)\begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite (D)

Méthode1 : Soit $t\in\mathbb{R}$; on a : $(D)\ \begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x+4=-5t \\ y=t \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} \frac{x+4}{-5}=t \\ y=t \end{cases}$

Donc on obtient : $\frac{x+3}{6}=\frac{y}{2}$ (On Ecrit cette Equation sous la forme ax + by + c = 0):

Équivaut à : $\frac{x+4}{-5}=y$ Équivaut à : $x+4=-5y$ Équivaut à : $x+5y+4=0$

Équivaut à : (D) : $x+5y+4=0$

Méthode2 : on a : $(D)\ \begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$ Donc : la droite (D) passe par $E(-4;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-5;1)$ donc : Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme :

$(\Delta)\ ax+by+c=0$; Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-b;a)$ or on a : $\vec{v}(-5;1)$

Donc : $a=1$ et $b=5$ alors l'équation devient : (D) $x+5y+c=0$

Or on sait que $E(-4;0)$ et $E \in (D)$

Donc : $-4+5\times 0+c=0$ c'est-à-dire : $-4+0+c=0$ donc : $c=4$ Par suite : $(D)\ x+5y+4=0$

C'est-à-dire après simplification : $(D)\ :\ x+5y+4=0$

2)b) Montrons que les droites (D) et (Δ) sont sécantes, puis déterminons leurs points d'intersection.

Méthode1 : On a : (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

On a : $(D)\ \begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$: Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-5;1)$

Ou on a : $(D)\ :\ x+5y+4=0$: Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-5;1)$

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1-(-4)\times(-5)=3-20=-17\neq 0$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires alors les droites (D) et (Δ) sont sécantes

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases} (D): x+5y+4=0 \\ (\Delta): 4x+3y+22=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x+5y=-4 \\ 4x+3y=-22 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x+5y=-4 & (\times -4) \\ 4x+3y=-22 & (\times 1) \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} -4x-20y=16 \\ 4x+3y=-22 \end{cases}$

On fait la somme des Equations (1) et (2) on obtient : $-17y=-6$ Équivaut à : $y=\frac{6}{17}$

D'où : $x+5y=-4$ Équivaut à : $x=-5y-4$ Équivaut à : $x=-5\times\frac{6}{17}-4=-\frac{30}{17}-4=-\frac{98}{17}$

Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{98}{17};\frac{6}{17}\right)\right\}$

Méthode2 : On a : $(\Delta): 4x+3y+22=0$ et on a : $(D)\ \begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \end{cases}$

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=-5t-4 \\ y=t \\ (\Delta): 4x+3y+22=0 \end{cases}$ D'où : $4(-5t-4)+3t+22=0$

Équivaut à : $-20t-16+3t+22=0$

Équivaut à : $-17t+6=0$ Équivaut à : $-17t=-6$ Équivaut à : $t=\frac{6}{17}$

Donc : $\begin{cases} x=-5\times\frac{6}{17}-4=-\frac{30}{17}-4=-\frac{98}{17} \\ y=\frac{6}{17} \end{cases}$ Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{98}{17};\frac{6}{17}\right)\right\}$

3) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D') parallèles a (D) passant par $A(-7;2)$

On a : (D') passe par le point $A(-7;2)$ et parallèle a (D) et $\vec{v}(-5;1)$ un vecteur directeur de (D)

Donc : $\vec{v}(-5;1)$ est aussi un vecteur directeur de (D')

Donc : (D') passe par le point $A(-7;2)$ et $\vec{v}(-5;1)$ un vecteur directeur de (D')

Donc : une représentation paramétrique de la droite (D') est : $(D')\begin{cases} x=-5t-7 \\ y=t+2 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien