Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°2 :H sur les leçons suivantes :

- L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles
- L'ordre dans : $\mathbb{R}$
- La droite dans le plan

Exercice01 : $2pts(1\,pts+1\,pts)$ Simplifier et écrire sous forme d'une puissance

$X=\dfrac{2^3\times3^5\times5^6}{2^5\times3\times15^4}$ et $Y=\dfrac{10^{-4}\times\left(10^3\right)^2}{10^3}$

Corrigé : $X=\dfrac{2^3\times3^5\times5^6}{2^5\times3\times15^4}=\dfrac{2^3\times3^5\times5^6}{2^5\times3\times\left(3\times5\right)^4}=\dfrac{2^3\times3^5\times5^6}{2^5\times3\times3^4\times5^4}=\dfrac{5^2}{2^2}=\dfrac{25}{4}$

$Y=\dfrac{10^{-4}\times\left(10^3\right)^2}{10^3}=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$.

Exercice02 : $3pts(1,5\,pts+1,5pts)$ On pose : $A=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}$

1) Calculer : A^2

2)En déduire que : $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Corrigé : 1) $A^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2+2\sqrt{9-\sqrt{79}}\sqrt{9+\sqrt{79}}+\left(\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2$

$A^2=9-\sqrt{79}+2\sqrt{\left(9-\sqrt{79}\right)\left(9+\sqrt{79}\right)}+9+\sqrt{79}$

$A^2=2\times9+2\sqrt{\left(9^2-\left(\sqrt{79}\right)^2\right)}=18+2\sqrt{(81-79)}=18+2\sqrt{2}=18+\sqrt{8}$

2) Déduction que $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

$A^2=18+\sqrt{8}$ Signifie que : $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$ ou $A=-\sqrt{18+\sqrt{8}}$ mais on a : $A=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}>0$

Finalement : $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Exercice03 : $3pts(1,5\,pts+1,5\,pts)$

Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$B=x^3+8+3\left(x^2-4\right)-2\left(x+2\right)$

$C=\left(x-3\right)\left(2x-1\right)+x^3-27$

Corrigé : $B=x^3+8+3\left(x^2-4\right)-2\left(x+2\right)$

$B=x^3+2^3+3\left(x^2-2^2\right)-2\left(x+2\right)$ et on a : $a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab-b^2\right)$ et $a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$

Donc : $B=\left(x+2\right)\left(x^2-2x+2^2\right)+3\left(x+2\right)\left(x-2\right)-2\left(x+2\right)$ On a : $x+2$ facteur commun

Donc : $B=\left(x+2\right)\left[\left(x^2-2x+2^2\right)+3\left(x-2\right)-2\right]=\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4+3x-6-2\right)$

Donc : $B=\left(x+2\right)\left(x^2+x-4\right)$

$C=\left(x-3\right)\left(2x-1\right)+x^3-27$

$C=\left(x-3\right)\left(2x-1\right)+x^3-3^3=\left(x-3\right)\left(2x-1\right)+\left(x-3\right)\left(x^2+3x+3^2\right)$

$C=\left(x-3\right)\left(2x-1+x^2+3x+9\right)=\left(x-3\right)\left(x^2+5x+8\right)$

Exercice04 : $2\,pts$ Soit x un élément de l'intervalle $\left[\frac{-5}{3};+\infty\right[$

Comparer : 11 et $-3x+\frac{1}{2}$ en utilisant les propriétés de l'ordre.

Corrigé : On a $x\in\left[\frac{-5}{3};+\infty\right[$ donc : $x\geq\frac{-5}{3}$

Donc : $x\times(-3)\leq\frac{-5}{3}\times(-3)$ c'est à dire : $-3x\leq 5$

Donc : $-3x+\frac{1}{2}\leq 5+\frac{1}{2}$ c'est à dire : $-3x+\frac{1}{2}\leq\frac{11}{2}$

Donc : ① $-3x+\frac{1}{2}\leq\frac{11}{2}$ et on sait que : $\frac{11}{2}<11$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-3x+\frac{1}{2}<11$

Exercice05 : $5\,pts(1\,pts+2\,pts+0,5\,pts+1,5\,pts)$

Soient a et b deux réels tels que : $b\in[0;2]$ et $|a+2|\leq 1$

1) Montrer que : $-3\leq a\leq -1$

2) Montrer que : $|a+b+1|\leq 2$

3) a) Vérifier que : $E=(a+3)(b-2)+6$

b) Déduire un encadrement pour le nombre E et donner son amplitude

Corrigé : 1) Soit a tel que : $|a+2|\leq 1$

On a: $|a+2|\leq 1$ signifie que : $-1\leq a+2\leq 1$

Signifie que : $-1-2\leq a+2-2\leq 1-2$ Signifie que : $\boxed{-3\leq a\leq -1}$

2) Montrons que : $|a+b+1|\leq 2$

$b\in[0;2]$ Signifie que : $0\leq b\leq 2$

On sait que : $-3\leq a\leq -1$ et $0\leq b\leq 2$ donc : $-3\leq a+b\leq 1$

Par suite : $-2\leq a+b+1\leq 2$

Donc : $|a+b+1|\leq 2$

3) On pose : $E=ab-2a+3b$

a) Vérifions que : $E=(a+3)(b-2)+6$

$(a+3)(b-2)+6=ab-2a+3b-6+6=ab-2a+3b=E$

Donc : $E=(a+3)(b-2)+6$

b) Déduisons un encadrement pour le nombre E.

On sait que : $E=(a+3)(b-2)+6$

On sait aussi que : $-3\leq a\leq -1$ et $0\leq b\leq 2$ donc : $0\leq a+3\leq 2$ et $-2\leq b-2\leq 0$ et donc : $0\leq -(b-2)\leq 2$

Par suite : $0\leq -(a+3)(b-2)\leq 4$

Donc : $-4\leq (a+3)(b-2)\leq 0$

Donc : $2\leq (a+3)(b-2)+6\leq 6$ D'où : $\boxed{2\leq E\leq 6}$

$2\leq E\leq 6$ est un encadrement d'amplitude : $6-2=4$

Exercice06 : $5pts(1,5\,pts+1\,pts+1\,pts+1,5\,pts)$

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$ et les droites : $(D_1): 6x+3y+2=0$ et $(D_2): 3x-2y-1=0$.

1) Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et déterminer le point d'intersection H (x ; y)

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

3) Etudier la position relative des droites (AB) et (D_1).

4) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point $C(1,2)$ et parallèle a (D_2)

Solutions : 1) $(6)\times(-2)-3\times3=-12-9=-21\neq0$

Donc : (D_1) et (D_2) se coupent et Le point d'intersection vérifie le système :

$\begin{cases}6x+3y+2=0\\3x-2y-1=0\end{cases}$ C'est-à-dire : $\begin{cases}6x+3y=-2\\3x-2y=1\end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix}6 & 3\\3 & -2\end{vmatrix}=-21\neq0$

Donc solution unique : $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{1}{21}$ et $y=\dfrac{\begin{vmatrix}6 & -2\\3 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{12}{-21}=-\dfrac{4}{7}$

Par suite : le point d'intersection est $H\left(-\dfrac{1}{21};-\dfrac{4}{7}\right)$

2) la droite (AB) a une équation de la forme :(AB) : $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{AB}(2,-4)$ $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ donc : $a=-4$ et $b=-2$

L'équation devient : $-4x-2y\ +c=0$ et on a : $A\in(AB)$ donc : $-4-4+c=0$ c'est-à-dire : $c=8$

Donc : (AB) $-4x-2y+8=0$ ou : (AB) : $2x+y-4=0$

3) On a (AB) : $2x+y-4=0$ et $(D_1): 6x+3y+2=0$

Et on a : $(6)\times(1)-3\times2=6-6=0$ donc : (D_1) et (AB) sont parallèles

4) (Δ) est parallèle a (D_2) donc le vecteur directeur de (D_2) est un vecteur directeur de (Δ)

Donc : $\vec{u}(2;3)$ est un vecteur (Δ) qui passe par $C(1,2)$; Par suite (Δ) : $\begin{cases}x\ =1+2t\\y=2+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien