Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°2 : I sur les leçons suivantes :

- L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles
- L'ordre dans : $\mathbb{R}$
- La droite dans le plan

Exercice01 : $3pts(1,5\,pts+1,5pts)$

Soient $A=\left\{-28/5,-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},2,5/2,49\right\}$, $B=\left\{-3,3,147/3\right\}$, $C=\left\{\sqrt{3},5/2,49\right\}$ trois ensembles.

1) Complétez … avec $\subset$ ou $\not\subset$.

$A\ldots\mathbb{Q}$; $A\ldots\mathbb{R}$; $B\ldots\mathbb{N}$; $\{3,4\}\ldots A$

$B\ldots\mathbb{Z}$; $B\ldots A$; $C\ldots A$; $\left\{-\sqrt{2},\sqrt{3}\right\}\ldots A$

2) Complétez … avec $\in$ ou $\notin$.

$-3\ldots B$; $2,5\ldots A$; $-\sqrt{2}\ldots C$; $5/3\ldots B$; $-5,6\ldots A$; $147/3\ldots C$

Corrigé : 1) $A\not\subset\mathbb{Q}$; $A\subset\mathbb{R}$; $B\not\subset\mathbb{N}$; $\{3,4\}\not\subset A$; $B\subset\mathbb{Z}$; $B\not\subset A$; $C\subset A$
$\left\{-\sqrt{2},\sqrt{3}\right\}\subset A$

2) $-3\in B$; $2,5\in A$; $-\sqrt{2}\notin C$; $5/3\ldots B$; $-5,6\in A$; $147/3\in C$

Exercice01 : $2pts(1\,pts+1pts)$

Simplifier et écrire sous forme d'une puissance :

$$C=\frac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\frac{9}{2^2} \quad ; \quad D=\frac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}$$

Corrigé : $C=\dfrac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\dfrac{9}{2^2}=\dfrac{3^{-5}\times\left(2^2\right)^{-2}}{\left(3\times2^2\right)^3}\times\dfrac{3^2}{2^2}=\dfrac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}$

$$C=\frac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}=3^{-5}\times2^{-4}\times3^2\times(3)^{-3}\times2^{-6}\times2^{-2}=3^{-5-3+2}\times2^{-4-6-2}$$

$$C=3^{-6}\times2^{-12}$$

$$D=\frac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}=\frac{-2^3\times4^{2\times(-1)}\times2^3}{1024\times\left(-2^3\right)^{-4}}=\frac{-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3}{2^{10}\times\left(-2^3\right)^{-4}}$$

$$D=-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3\times2^{-10}\times(-2)^{3\times4}=-2^{3-4+3-10+12}=-2^4=-16$$

Exercice01 : $(1pts)$ On pose : $B=100\left(\dfrac{2+22+222+2222}{4+44+444+4444}\right)^2$

Montrer que : $B\in\mathbb{N}$

Corrigé : $B=100\left(\dfrac{2+22+222+2222}{4+44+444+4444}\right)^2=100\left(\dfrac{2(1+11+111+1111)}{4(1+11+111+1111)}\right)^2=100\left(\dfrac{2}{4}\right)^2=100\dfrac{1}{4}=25\in\mathbb{N}$

Donc : $B=25\in\mathbb{N}$

Exercice06 : $(1pts)$ On pose : $a=10\sqrt{51}$ et $b=70+\sqrt{2}$

Comparer a et b

Corrigé : $a=10\sqrt{51}$ et $b=70+\sqrt{2}$

Puisque a et b sont positifs il suffit de comparer

a^2 et b^2 : on a $a^2=\left(10\sqrt{51}\right)^2=5100$ $b^2=\left(70+\sqrt{2}\right)^2=4900+140\sqrt{2}+2=4902+140\sqrt{2}$

$a^2-b^2=198-140\sqrt{2}=2\left(99-70\sqrt{2}\right)$

Et on a : $(99)^2=9801$ et $\left(70\sqrt{2}\right)^2=9800$

Donc : $99-70\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$

Equivaut à : $2\left(99-70\sqrt{2}\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a^2-b^2>0$ donc $a>b$ ($a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$)

Exercice05 : $3pts(1\,pts\times3)$

Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$

$A=3x\left(9x^2-12x+4\right)+(5x-1)\left(3x^2-2x\right)+6x^2(3x-2)$

$B=4y^2-2y-9x^2+3x$

$C=x^3+8+3\left(x^2-4\right)-2(x+2)$

Corrigé : $A=3x\left(9x^2-12x+4\right)+(5x-1)\left(3x^2-2x\right)+6x^2(3x-2)$

$A=3x\left((3x)^2-2\times3x\times2+2^2\right)+x(5x-1)(3x-2)+6x^2(3x-2)$

$A=3x(3x-2)^2+x(5x-1)(3x-2)-6x\times x(3x-2)$ On a : $x(3x-2)$ facteur commun

$A=x(3x-2)\left[3(3x-2)+3(5x-1)-6x\right]=x(3x-2)(9x-6+15x-3-6x)=x(3x-2)(18x-3)$

$B=4y^2-2y-9x^2+3x=4y^2-9x^2-(2y-3x)$

$B=(2y-3x)(2y+3x)-(2y-3x)\times1=(2y-3x)(2y+3x-1)$

$C=x^3+2^3+3\left(x^2-2^2\right)-2(x+2)$ et on a : $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)$ et $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Donc : $C=(x+2)\left(x^2-2x+2^2\right)+3(x+2)(x-2)-2(x+2)$ On a : $x+2$ facteur commun

Donc : $C=(x+2)\left[\left(x^2-2x+2^2\right)+3(x-2)-2\right]$

Donc : $C=(x+2)\left(x^2-2x+4+3x-6-2\right)$

Donc : $C=(x+2)\left(x^2+x-4\right)$

Exercice01 : $3pts(1pts+1\,pts+1\,pts)$; a et b deux nombres réels tel que :

$a\geq-2$ et $b\leq-1$ et $a-b=6$

1) Simplifier : $A=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+1)^2}$

2) Montrer que : $a\leq5$ et $b\geq-8$

3) Calculer la valeur de : $B=|a+b-4|+|a+b+10|$

<u>Solution :</u>1) $a\geq-2$ ssi $a+2\geq0$ et $b\leq-1$ ssi $b+1\leq0$

On a : $A=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+1)^2}=|a+2|+|b+1|$

$A=a+2-(b+1)=a-b+1=6+1=7$

2)Montrons que : $a\leq5$

On sait que : $b\leq-1$ et $a-b=6$

Donc : $a-6=b$ et $b\leq-1$

Donc : $a-6\leq-1$ donc $a\leq5$

Montrons que : $b\geq-8$

On sait que : $a\geq-2$ et $a-b=6$ donc : $b+6\geq-2$

Donc : $b \geq -2-6$ c'est-à-dire : $b \geq -8$
3) On a : $-2 \leq a \leq 5$ et $-8 \leq b \leq -1$ donc : $-10 \leq a+b \leq 4$

Donc : $-14 \leq a+b-4 \leq 0$ et $0 \leq a+b+10 \leq 14$
Donc : $|a+b-4| = -(a+b-4) = -a-b+4$
Et on a donc : $|a+b+10| = a+b+10$
Donc : $B = |a+b-4| + |a+b+10| = -a-b+4+a+b+10$
Donc : $B = 14$
Exercice09 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$

Soit : $x \in \mathbb{R}$; on pose : $A = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

1) Montrer que : $A - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$

2) En déduire que : $\left|A - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{16}x^2$.

3) Trouver une valeur approchée du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{4,16}}$ d'amplitude 10^{-2}

Corrigé : 1) $A - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \dfrac{1}{2}$

$$A - \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{\left(2-\sqrt{x^2+4}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}{2\sqrt{x^2+4}\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)} = \frac{2^2-\sqrt{x^2+4}^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}^2\right)}$$

$$A - \frac{1}{2} = \frac{4-x^2-4}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)} = \frac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$$

2) Déduisons que : $\left|A - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{16}x^2$.

On a : $A - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$ donc :

$$\left|A - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}\right| = \frac{x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$$

Car x^2 *et* $2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)$ sont positifs

On a : $x^2 \geq 0$ donc : $x^2+4 \geq 4$ donc : $\sqrt{x^2+4} \geq \sqrt{4}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x^2+4} \geq 2$ donc $2\sqrt{x^2+4} \geq 4$
De : $2\sqrt{x^2+4} \geq 4$ et $x^2+4 \geq 4$ par somation on a donc : $2\sqrt{x^2+4}+x^2+4 \geq 8$
Donc : $2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right) \geq 16$

Donc : $\dfrac{1}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)} \leq \dfrac{1}{16}$

Donc : $\dfrac{x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)} \leq \dfrac{1}{16}x^2$

D'où : $\left|A-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{16}x^2$

3) Trouvons une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ d'amplitude 2×10^{-4}

On a : $\left|A-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{16}x^2$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{16}x^2$

Prenons : $x=0,4$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{0,4^2+4}}-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{16}\times0,4^2$ ce qui signifie que : $\left|\frac{1}{\sqrt{4,16}}-0.5\right| \leq 10^{-2}$

D'où 0.5 est une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{4,16}}$ d'amplitude 10^{-2}

Exercice11 : $4pts(1\ pts+1,5pts+1\ pts+0,5pts)$

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D):3x-5y+6=0$ et $(D'):x-y=0$.

1) Donner une représentation paramétrique des Droites (D) et (D').

2) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) Qui passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC) .Avec : $E(3;3)$ et $C(4;0)$

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) et déterminer les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D').

4) Montrer que J est le milieu de $[IB]$.

Solution : 1) a) un vecteur directeur de $(D):3x-5y+6=0$ est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}(5;3)$

Déterminons un point de (D) ?

Si $x=0$ alors : $(D):3\times0-5y+6=0$ donc $y=\frac{6}{5}$

Donc : une représentation paramétrique de la droites (D) est : $(D)\begin{cases}x=0+5t\\ y=\frac{6}{5}+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

b) un vecteur directeur de $(D'):x-y=0$ est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}'(1,1)$

Déterminons un point de (D') ?

Si $x=0$ alors : $(D'):0-y=0$ donc $y=0$

Donc : une représentation paramétrique de la droite (D') est : $(D')\begin{cases}x=0+1k\\ y=0+1k\end{cases}(k\in\mathbb{R})$

2) (Δ) passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC)

Donc : $\overrightarrow{EC}$ un vecteur directeur de (Δ) : $\overrightarrow{EC}(1;-3)$

Et on sait que : $\vec{u}(-b;a)$ donc : Donc : $a=-1$ et $b=-3$ par suite (Δ): $-3x-y+c=0$

Et on sait que (Δ) passe par $B(1;0)$ on trouve $c=3$ donc : (Δ) $-3x-y+3=0$

3)a) Déterminons les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) ?

On va résoudre le système $\begin{cases} 3x-5y=-6 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

On fait la somme des deux équations membre a membre on trouve : $-6y=-9 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve : $-3x-\frac{3}{2}+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Donc le point d'intersection I de (Δ) et (D) est $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

b) Déterminons les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D') ?

On va résoudre le système $\begin{cases} x-y=0 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

$x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve : $-3x-x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

Donc le point d'intersection J de (Δ) et (D') est $J\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

4) Montrons que J est le milieu de $[IB]$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$?

On a : $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{JB}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$

Donc : J est le milieu de $[IB]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien