http://www.xriadiat.com **DS3: A** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 : A sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE1(15%)**

Exercice01 : $2,5pts(0,5pts+0,5pts+1pts+0,5pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x+6=-x\sqrt{3}-\sqrt{27}$ 2) (E) : $\frac{x-2}{x-3}=x-1$ 3) $|x-1|=5$ 4) $|2x+1|=|x-3|$

5) $|x+2|=-1$

Solution : 1) $2x+6=-x\sqrt{3}-\sqrt{27}$ Équivaut à : $2x+x\sqrt{3}=-\sqrt{9\times3}-6$

Équivaut à : $x\left(2+\sqrt{3}\right)=-3\left(\sqrt{3}+2\right)$

Équivaut à : $x=\frac{-3\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=-3$ et par suite : $S=\{-3\}$

2) (E) $\frac{x-2}{x-3}=x-1$

● a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette équation est définie si et seulement si $x-3\neq0$ qui signifie que : $x\neq3$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E=\mathbb{R}-\{3\}$

● b) On résoud l'équation :

$\frac{x-2}{x-3}=x-1$ Signifie que : $x-2=(x-3)(x-1)$

Signifie que : (E') $x^2-5x+5=0$

Le discriminant de : (E') $x^2-5x+5=0$ est : $\Delta=5$ et ses racines sont : $x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

Donc : $S=\left\{\frac{5-\sqrt{5}}{2};\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$

3) $|x-1|=5$ Signifie que : $x-1=5$ ou $x-1=-5$

Signifie que : $x=6$ ou $x=-4$ Donc : $S=\{-4;6\}$

4) $|2x+1|=|x-3|$ signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$

Signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$

Signifie que : $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$ Donc : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

5) $|x+2|=-1$ $S=\varnothing$ car $|x+2|\geq0$

Exercice02 : $2pts(1pts+1pts)$

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un tableau de signes.

1) $x^2-16<0$ 2) $\dfrac{3x-1}{x+2}>1$

Solution : 1) $x^2-16<0$ Signifie que : $(x-4)(x+4)<0$

Valeurs frontières : $x-4=0$ Signifie que : $x=4$ et $x+4=0$ Signifie que : $x=-4$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=]-4,4[$

2) $\dfrac{3x-1}{x+2}>1$

● On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette équation est définie si et seulement si $x+2\neq 0$ qui signifie que : $x\neq -2$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-2\}$

● On résoud l'inéquation : $\dfrac{3x-1}{x+2}>1$ On annule le second membre :

$\dfrac{3x-1}{x+2}>1$ Signifie que : $\dfrac{3x-1}{x+2}-1>0$

Signifie que : $\dfrac{3x-1-x-2}{x+2}>0$ Signifie que : $\dfrac{2x-3}{x+2}>0$

Valeurs frontières : $2x-3=0$ Signifie que : $x=\dfrac{3}{2}$ et $x+2=0$ Signifie que : $x=-2$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x-3}{x+2}$		$+$		$-$	0	$+$	

Donc : $S=]-\infty,-2]\cup\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$

Exercice03 : $3,5pts(0,5pts+3pts)$

Soit le trinôme (E) : $P(x)=-3x^2+\sqrt{3}x+3$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) $a=-3$: et et $b=\sqrt{3}$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=\sqrt{3}^2-4\times(-3)\times 3=3+36=39$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=\frac{-\sqrt{3}}{-3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha\times\beta=\frac{3}{-3}=-1$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-2(-1)=\frac{3}{9}+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{7}{3}}{-1}=-\frac{7}{3}$

On sait que : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$ c'est-à-dire : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-3(-1)\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{27}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}=\frac{10\sqrt{3}}{9}$

Exercice04 : $4,5pts(1pts+0,5pts+3pts)$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivante : $3x^2-2x-1=0$

b) En déduire une factorisation du trinôme : $3x^2-2x-1$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

a) $3x-2\sqrt{x}-1=0$ b) $3x^2-2|x|-1=0$ c) $3x^4-2x^2-1=0$

Corrigé : 1) a) $3x^2-2x-1=0$

Calculons le discriminant de l'équation $3x^2-2x-1=0$: a = 3, b = -2 et c = - 1

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times3}=-\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times3}=1$ Donc : $S=\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$

b) D'éduction d'une factorisation du trinôme : $3x^2-2x-1$

Le trinôme : $3x^2-2x-1$ à deux racines : $x_1=-\frac{1}{3}$ et $x_2=1$ Donc :

$$3x^2-2x-1=a(x-x_1)(x-x_2)=3\left(x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)(x-1)=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)=(3x+1)(x-1)$$

2) a) $3x-2\sqrt{x}-1=0$ avec $x\geq0$

$3x-2\sqrt{x}-1=0$ Equivalent à : $3\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}-1=0$ car $\sqrt{x}^2=x$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $3X^2-2X-1=0$

Donc : d'après 1) on a : $X=-\frac{1}{3}$ ou $X=1$

Equivalent à : $\sqrt{x}=-\frac{1}{3}$ ou $\sqrt{x}=1$

Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\frac{1}{3}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{x}=1$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=1^2$ c'est-à-dire : $x=1$ et par suite : $S=\{1\}$.

2) b) $3x^2-2|x|-1=0$ Equivalent à : $3|x|^2-2|x|-1=0$ car $|x|^2=x^2$

Faisons un changement de variable en posant : $X=|x|$ nous obtenons l'équation :

$3X^2-2X-1=0$

Donc : d'après 1) on a : $X=-\frac{1}{3}$ ou $X=1$ qui est équivalent à : $|x|=-\frac{1}{3}$ ou $|x|=1$

Mais l'équation : $|x|=-\frac{1}{3}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x|=1$ Signifie : $x=1$ ou $x=-1$ par suite : $S=\{-1;1\}$

2) c) $3x^4-2x^2-1=0$ Equivalent à : $3\left(x^2\right)^2-2x^2-1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons donc : l'équation :

$3X^2-2X-1=0$

Donc : d'après 1) on a : $X=-\frac{1}{3}$ ou $X=1$ et par suite : $x^2=-\frac{1}{3}$ ou $x^2=1$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{1}{3}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2=1$ Signifie : $x=1$ ou $x=-1$ par suite : $S=\{-1;1\}$.

Exercice05 : $2pts(1pts+1pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}3x-4y=10\\-x+5y=-7\end{cases}$

2)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases}3a^2-\frac{4}{b+1}=10\\-a^2+\frac{5}{b+1}=-7\end{cases}$

Solution : 1) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases}3x-4y=10\\-x+5y=-7\end{cases}$

$\begin{cases}3x-4y=10\\-x+5y=-7\end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases}3x-4y=10 & (\times1)\\-3x+15y=-21 & (\times3)\end{cases}$

Donc : la somme des équations donne : $3x-4y-3x+5y=10-7$

Équivalent : $y=3$ Équivalent : $y=-1$

On a : $-x+5y=-7$ donc : $-x-5=-7$ Équivalent : $x=2$

La solution du système est donc : $S=\{(2,-1)\}$

2) Déduction des questions précédents des solutions du système : $\begin{cases}3a^2-\frac{4}{b+1}=10\\-a^2+\frac{5}{b+1}=-7\end{cases}$

$$\begin{cases} 3a^2 - \dfrac{4}{b+1} = 10 \\ -a^2 + \dfrac{5}{b+1} = -7 \end{cases} \quad \text{Équivalent : } \begin{cases} 3a^2 - 4\dfrac{1}{b+1} = 10 \\ -a^2 + 5\dfrac{1}{b+1} = -7 \end{cases}$$

On pose : $\begin{cases} x = a^2 \\ y = \dfrac{1}{b+1} \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ -x + 5y = -7 \end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $x = 2$ et $y = -1$

Donc : $a^2 = 2$ et $\dfrac{1}{b+1} = -1$ Équivalent :($a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$) et $b+1 = -1$

Donc : $a^2 = 2$ et $\dfrac{1}{b+1} = -1$ Équivalent :($a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$) et $b = -2$

Par suite : $S = \left\{ \left(\sqrt{2}, -2\right); \left(-\sqrt{2}, -2\right) \right\}$

Exercice06 : $6pts(0,5pts + 1pts + 0,5pts + 1pts + 1pts + 1pts + 1pts)$

Soit le polynôme suivant (E) : $P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$

1) Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x) = (x+1)\left(x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + \sqrt{2}\right)$

3) On pose : $Q(x) = x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + \sqrt{2}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x) = 0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x - \left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) \leq 0$

Solution : $P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$

1) Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$: $P(-1) = (-1)^3 - \sqrt{2}(-1)^2 - (-1) + \sqrt{2}$

$P(-1) = -1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}$

$P(-1) = 0$

Donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que : $P(x) = (x+1)\left(x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + \sqrt{2}\right)$

$$\begin{aligned} (x+1)\left(x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + \sqrt{2}\right) &= x^3 - \left(\sqrt{2}+1\right)x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + \sqrt{2} \\ &= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \sqrt{2}x - x + \sqrt{2} \\ &= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2} \\ &= P(x) \end{aligned}$$

3) a) $\Delta = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 1 - 4 \times 1 \times \sqrt{2}$

$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times1\times\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$: $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1$ car : $\sqrt{2}-1>0$

On a $\Delta\succ0$ donc : $x_1=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ et $x_2=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

Par suite: $S=\left\{\sqrt{2};1\right\}$

4) Recherche des solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$ peut s'écrire sous la forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=1$

On a donc : $\sqrt{x}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x}=1$

Donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=\sqrt{2}^2$ et $\left(\sqrt{x}\right)^2=1^2$ c'est à dire : $x=2$ et $x=1$ par suite : $S=\{1;2\}$.

5) Recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$:

On a : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$P(x)=0$ Signifie que : $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

Signifie que : $x=-1$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=1$ On a donc : $S=\left\{-1;1;\sqrt{2}\right\}$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq0$

$P(x)\leq0$ Signifie que : $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\leq0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien