Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 : B sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE1(15%)**

Exercice01 : $3pts(0,5pts+0,5pts+0,5pts+1\,pts+0,5pts)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $-5(3x+5)=-15x-24$ 2) $5(2x-3)=12x-2\left(x+\frac{15}{2}\right)$

3) $\left(25x^2-4\right)-2(5x+2)(x+4)=0$ 4) $\frac{3}{x+2}-\frac{5}{x-2}=0$ 5) $|2x+1|=|x-3|$

Solution : 1) $-5(3x+5)=-15x-24$ équivaut à $-15x-25=-15x-24$ équivaut à $0x=1$

Équivaut à $0=1$ ceci est impossible

Donc l'ensemble des Solutions est : $S=\varnothing$

2) $5(2x-3)=12x-2\left(x+\frac{15}{2}\right)$

Équivaut à $10x-15=12x-2x-15$ équivaut à $10x-15=10x-15$ Équivaut à $10x-15=10x-15$

Donc l'ensemble de toutes les Solutions est : $S=\mathbb{R}$

3) $\left(25x^2-4\right)-2(5x+2)(x+4)=0$ signifie que : $\left((5x)^2-2^2\right)-2(5x+2)(x+4)=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x+2)(5x-2)-2(5x+2)(x+4)=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x+2)\left[(5x-2)-2(x+4)\right]=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x+2)(5x-2-2x-8)=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x+2)(3x-10)=0$

Ce qui est équivalent à : $5x+2=0$ ou $3x-10=0$

Ce qui est équivalent à : $x=-\frac{2}{5}$ ou $x=\frac{10}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les Solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{5};\frac{10}{3}\right\}$

4) $\frac{2}{x+3}-\frac{7}{x-3}=0$

Cette équation n'existe pas si : $x+3=0$ ou $x-3=0$

Les valeurs interdites de cette équation sont -3 et 3. L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

On commence par réduire au même dénominateur les deux fractions. Le dénominateur commun est : $(x+3)(x-3)$

$\frac{2}{x+3}-\frac{7}{x-3}=0$ Équivalent à $\frac{2(x-3)-7(x+3)}{(x+3)(x-3)}=0$

Équivalent à $\frac{2x-6-7x-21}{(x+3)(x-3)}=0$ c'est-à-dire : $\frac{-5x-27}{(x+3)(x-3)}=0$

Donc : $-5x-27=0$ car le dénominateur ne peut pas s'annuler.

Équivalent à : $x=-\frac{27}{5}\in\mathbb{R}-\{-3,3\}$

d'où : $S=\left\{-\frac{27}{5}\right\}$

5) $|2x+1|=|x-3|$

$|2x+1|=|x-3|$ Signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$

Signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$

Signifie que : $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$

Donc : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

Exercice02 : $3pts(1,5pts+2pts)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : 1) $x^2\leq 1$ 2) $\frac{2}{x-2}\leq\frac{3}{x+1}$

Solution : Méthode : Pour résoudre une inéquation du type :
A(x) ≥ B(x) (ou A(x) > B(x) ou A(x) ≤ B(x) ou A(x)

- 1. On déterminer le domaine de définition de l'inéquation
- 2. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.
- 3. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

1) $x^2\leq 1$ Equivaut à : $x^2-1\leq 0$ Equivaut à : $x^2-1^2\leq 0$ Equivaut à : $(x+1)(x-1)\leq 0$

$(x+1)(x-1)\leq 0$

$x+1=0$ Signifie que : $x=-1$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$-$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On cherche à résoudre l'inéquation : $(x+1)(x-1)\leq 0$

Par conséquent : $S=[-1,1]$

2) $\frac{2}{x-2}<\frac{3}{x+1}$

- 1. On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$ et $x+1\neq 0$ qui signifie que : $x\neq 2$ ou $x\neq -1$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

- 2. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.

$\frac{2}{x-2}<\frac{3}{x+1}$ Signifie que : $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+1}<0$ Signifie que : $\frac{2(x+1)}{(x-2)(x+1)}-\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+1)}<0$

Signifie que : $\frac{2x+2-3x+6}{(x-2)(x+1)}<0$ Signifie que : $\boxed{\frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}<0}$

● 3. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.
$-x+8=0$ Équivaut à : $x=8$ et $x-2=0$ qui signifie que : $x=2$ et $x+1=0$ qui signifie que : $x=-1$
Remarque :-1 et 2 sont des valeurs interdites car elle annule les dénominateurs $x+1$et $x-2$

x	$-\infty$		-1		2		8		$+\infty$
$-x+8$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

On cherche à résoudre l'inéquation : $\frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}<0$

Donc : $S=]-1,2[\cup]8,+\infty[$

Exercice03 : $1pts(1pts+1pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2-7x-8=0$
2) En déduire les solutions de l'équation suivante : $x^6-7x^3-8=0$

Solution : 1) Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=81\succ 0$
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :
$x_1=\frac{7-9}{2}=-1$ et $x_2=\frac{7+9}{2}=8$ donc : $S=\{-1;8\}$

2) $x^6-7x^3-8=0$ Signifie que : $(x^3)^2-7(x^3)-8=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^3$; nous obtenons l'équation :
$X^2-7X-8=0$: Donc : d'après 1) on a : $X=-1$ ou $X=8$
Donc : $x^3=-1$ ou $x^3=8$.
Equivalent à : $x=-1$ ou $x=2$ par suite : $S=\{-1;2\}$

Exercice04 : $4pts(1,5pts+1pts+1,5pts)$

On considère l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

1) On pose : $a=\sqrt{13}-1$ et $b=\sqrt{13}+3$;

Vérifier que : $\frac{a}{b}=4-\sqrt{13}$ et Montrer que : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$

2) Déduire sans calculer le discriminant Δ les solutions de l'équation (E)

3) Soient α et β les solutions de l'équation (E)

Donner une équation du second degré qui a pour solutions : $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$

Solution : 1) a) $b=\sqrt{13}+3$ et $a=\sqrt{13}-1$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{13}+3}=\frac{(\sqrt{13}-1)(\sqrt{13}-3)}{(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-3)}=\frac{13-3\sqrt{13}-\sqrt{13}+3}{13-9}=\frac{16-4\sqrt{13}}{4}=4-\sqrt{13}$$

Montrons que : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$

$\left(4-\sqrt{13}\right)^2-8\left(4-\sqrt{13}\right)+3=16-8\sqrt{13}+13-32+8\sqrt{13}+3=0$

Donc : $\frac{a}{b}$ est une solution de l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

2) On a : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$: Donc : $\frac{a}{b}=4-\sqrt{13}=x_1$ est une solution de l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

Soit : x_2 l'autre solution donc : $x_1+x_2=\frac{-(-8)}{1}=8$ c'est-à-dire : $x_2=8-\left(4-\sqrt{13}\right)=4+\sqrt{13}$

3) Soient α et β les solutions de l'équation (E)

Donnons une équation du second degré qui a pour solutions : $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$?

$$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(4-\sqrt{13}\right)^2+\left(4+\sqrt{13}\right)^2}{\left(4-\sqrt{13}\right)\left(4+\sqrt{13}\right)}=\frac{4^2-8\sqrt{13}+13+4^2+8\sqrt{13}+13}{16-13}=\frac{58}{3} \text{ et } P=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=1$$

Donc : l'équation du second degré est : $x^2-Sx+P=0$ c'est-à-dire : $x^2-\frac{58}{3}x+1=0$

Ou : l'équation du second degré est : $3x^2-58x+3=0$

Exercice05 : $3,5pts(0,5pts+1pts+1pts+1pts)$

On considère l´équation : (E) : $2x^3-13x^2+5x+6=0$

1) Montrer que le nombre 1 est solution de (E)

2) Déterminer trois réels : a, b et c tels que : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $2x^3-13x^2+5x+6<0$

Corrigé :1) On remarque que $2\times1^3-13\times1^2+5\times1+6=2-13+5+6=13-13=0$

Donc : le nombre 1 est solution de (E)

2)Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$

Or, $(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=2 \\ b-a=-13 \\ c-b=5 \\ -c=6 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=2 \\ b=-11 \\ c=-6 \end{cases}$ Donc : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)\left(2x^2-11x-6\right)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$2x^3-13x^2+5x+6=0$ Equivaut à : $(x-1)\left(2x^2-11x-6\right)=0$

Equivaut à : $x-1=0$ ou $2x^2-11x-6=0$ Equivaut à : $x=1$ ou $2x^2-11x-6=0$

Le discriminant de : $2x^2-11x-6=0$ est : $\Delta=(-11)^2-4\times2\times(-6)=121+48=169=13^2$ et ses solutions

Sont : $x_1=\frac{11-\sqrt{169}}{2\times2}=\frac{11-13}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{11+\sqrt{169}}{2\times2}=\frac{11+13}{4}=\frac{24}{4}=6$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\left\{-\frac{1}{2};1;6\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $2x^3-13x^2+5x+6<0$

On a : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)(2x^2-11x-6)$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		6		$+\infty$
$2x^2-11x-6$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]1,6\right[$

Exercice06 : $2pts(1pts+1pts)$ **1)** résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}-7x-3y=4\\4x+5y=-2\end{cases}$

2) En déduire les solutions du système suivant : $\begin{cases}\frac{-7}{x}-\frac{3}{y}=4\\\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=-2\end{cases}$

Corrigé : 1) Le déterminant du système est : $\Delta=\begin{vmatrix}-7&-3\\4&5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq0$

Donc : $x=\frac{\begin{vmatrix}4&-3\\-2&5\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{14}{23}$ **et** $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-7&4\\4&-2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{2}{23}$

Donc : $S=\left\{\left(-\frac{14}{23},\frac{2}{23}\right)\right\}$

2) Pour que le système existe il faut que : $x\neq0$ et $y\neq0$

$\begin{cases}-7\frac{1}{x}-3\frac{1}{y}=4\\4\frac{1}{x}+5\frac{1}{y}=-2\end{cases}$ On pose : $X=\frac{1}{x}$ et $Y=\frac{1}{y}$

Le système devient : $\begin{cases}-7X-3Y=4\\4X+5Y=-2\end{cases}$

D'après 1) on a : $X=-\frac{14}{23}$ et $Y=-\frac{2}{23}$ Donc : $\frac{1}{x}=-\frac{14}{23}$ et $\frac{1}{y}=\frac{2}{23}$

Donc : $x=-\frac{23}{14}$ et $y=\frac{23}{2}$ Par suite : $S=\left\{\left(-\frac{23}{14},\frac{23}{2}\right)\right\}$

Exercice07 : $3pts(1pts+2pts)$ 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :a) $x_1=-6\pi$ b) $x_2=\frac{31\pi}{3}$

2) Calculer : $\cos(-6\pi)$; $\sin(-6\pi)$; $\tan(-6\pi)$; $\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{31\pi}{3}\right)$

Corrigé :1) a) $x_1 = -6\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a $x_1 = -6\pi$

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x_1 = 2k\pi$ c a d $\alpha = -6\pi + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < -6\pi + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi + 6\pi < 2k\pi \leq \pi + 6\pi$ Équivalent à : $5\pi < 2k\pi \leq 7\pi$

Équivalent à : $5 < 2k \leq 7$ Équivalent à : $\frac{5}{2} < k \leq \frac{7}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = 3$ et donc $\alpha = -6\pi + 2 \times 3\pi = -6\pi + 6\pi = 0$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x_1 = -6\pi$ est $\alpha = 0$

b) $x_2 = \frac{31\pi}{3}$: Methode*1 :* Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x_2

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x_2 = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = \frac{31\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < \frac{31\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi - \frac{31\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{31\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{34\pi}{3} < 2k\pi \leq -\frac{28\pi}{3}$ Équivalent à : $-\frac{34}{3} < 2k \leq -\frac{28}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\frac{17}{3} < k \leq -\frac{14}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$ C'est-à-dire : $-5{,}6 < k \leq -4{,}6$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -5$ et donc : $\alpha = \frac{31\pi}{3} + 2k\pi = \frac{31\pi}{3} + 2(-5)\pi = \frac{31\pi}{3} - 10\pi = \frac{31\pi - 30\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x_2 = \frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Methode2 : $x_2 = \frac{31\pi}{3} \notin]-\pi ; \pi]$

On divise 31 par 3 on trouve $\simeq 10{,}3$ on prend le nombre entier proche ex : 10 et $10 \times 3 = 30$

On a $\frac{31\pi}{3} = \frac{30\pi + \pi}{3} = \frac{30\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{\pi}{3} + 5 \times 2\pi$ et $\frac{\pi}{3} \in]-\pi ; \pi]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_2 = \frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha = \frac{\pi}{3}$

2) $\cos(-6\pi) = \cos(0) = 1$; $\sin(-6\pi) = \sin(0) = 0$; $\tan(-6\pi) = \tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$;

$\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{31\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien