Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 :C sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE1(15%)**

Exercice01 : $3,5pts(0,5pts+0,5pts+0,5pts+1pts+0,5pts+0,5pts)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x+3=-x\sqrt{2}-\sqrt{18}$ 2) $3(2x+5)=6x-1$ 3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$

4) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ 5) $|3x+2|=|x-4|$ 6) $3|x+5|=-\frac{1}{2}$

Solution : 1) $x+3=-x\sqrt{2}-\sqrt{18}$ Équivaut à : $x+x\sqrt{2}=-3-\sqrt{18}$

Équivaut à $x(1+\sqrt{2})=-3-3\sqrt{2}$

Équivaut à : $x=\frac{-3-3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{-3(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}=-3$ et par suite : $S=\{-3\}$

2) $3(2x+5)=6x-1$ équivaut à $6x+15=6x-1$ équivaut à $6x-6x=-1-15$ équivaut à $0x=-16$

Équivaut à $0=-16$ ceci est impossible

Donc l'ensemble des Solutions est : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$

Équivaut à $4x-8=6x-2x-8$ équivaut à $4x-4x+8-8=0$

Équivaut à $0=0$ Donc l'ensemble de toutes les Solutions est : $S=\mathbb{R}$

4) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$: Cette équation existe si $x^2-9\neq 0$

$x^2-9=0$ Équivalent à : $x^2-3^2=0$ équivalent à : $(x+3)(x-3)=0$

Équivalent à $x+3=0$ ou $x-3=0$ équivalent à : $x=-3$ ou $x=3$

Les valeurs interdites de cette équation sont -3 et 3.

L'équation est donc définie sur : D_E = $\mathbb{R}$\{-3; 3}.

$\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ Équivalent à $(x-7)(x+3)=0$ équivalent à $x-7=0$ ou $x+3=0$

Équivalent à $x=7\in D_E$ ou $x=-3\notin D_E$

Donc : $S=\{7\}$

5) $|3x+2|=|x-4|$ signifie que : $3x+1=x-4$ ou $3x+2=-(x-4)$

Signifie que : $3x+1=x-4$ ou $3x+2=-x+4$

Signifie que : $2x=-5$ ou $4x=2$

Signifie que : $x=-\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ Donc : $S=\left\{-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right\}$

6) $3|x+5|=-\frac{1}{2}$ Signifie que : $|x+5|=-\frac{1}{6}$ $S=\varnothing$ Car $|x+5|\geq 0$ et $-\frac{1}{6}<0$

Exercice02 : $3pts(1,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts)$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivante : $4x^2-7x-2=0$

b) En déduire une factorisation du trinôme : $4x^2-7x-2$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

a) $4x-7\sqrt{x}-2=0$ b) $4x^4-7x^2-2=0$ c) $4x^4-7x^3=2x^2$

Solution : 1) a) $4x^2-7x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $4x^2-7x-2=0$: a = 4, b = -7 et c = - 2

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)-\sqrt{81}}{2\times 4}=-\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)+\sqrt{81}}{2\times 4}=2$$

Donc : $S=\left\{-\frac{1}{4};2\right\}$

b) Le trinôme : $4x^2-7x-2$ a deux racines : $x_1=-\frac{1}{4}$ et $x_2=2$

Donc : trinôme $4x^2-7x-2$ a une forme factorisée :

$$4x^2-7x-2=a\left(x-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)(x-2)=4\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-2)=(4x+1)(x-2)$$

2) $4x-7\sqrt{x}-2=0$ avec $x\geq 0$

$4x-7\sqrt{x}-2=0$ Equivalent à : $4\left(\sqrt{x}\right)^2-7\sqrt{x}-2=0$ car $\sqrt{x}^2=x$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $4X^2-7X-2=0$

Donc : d'après 1) on a : $X=-\frac{1}{4}$ ou $X=2$ Equivalent à : $\sqrt{x}=-\frac{1}{4}$ ou $\sqrt{x}=2$

Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\frac{1}{4}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ c'est-à-dire : $x=4$ et par suite : $S=\{4\}$.

2) b) $4x^4-7x^2-2=0$ Equivalent à : $4\left(x^2\right)^2-7x^2-2=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons donc : l'équation : $4X^2-7X-2=0$

Donc : d'après 1) on a : $X=-\frac{1}{4}$ ou $X=2$ et par suite : $x^2=-\frac{1}{4}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{1}{4}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2=2$ Signifie : $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$ par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

c) $4x^4-7x^3=2x^2$ Equivalent à : $4x^4-7x^3-2x^2=0$

Equivalent à : $x^2\left(4x^2-7x-2\right)=0$ Equivalent à : $x^2=0$ ou $4x^2-7x-2=0$

Equivalent à : $x=0$ ou $x_1=-\frac{1}{4}$ ou $x_2=2$ et par suite : $S=\left\{-\frac{1}{4};0;2\right\}$.

Exercice03 : $2,5pts(1,5pts+1pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\frac{2x+1}{x+2}\geq 3$ 2) $4x^2-7x-2>0$

Solution : Méthode : Pour résoudre une inéquation du type :

A(x) ≥ B(x) (ou A(x) > B(x) ou A(x) ≤ B(x) ou A(x)

● a. On déterminer le domaine de définition de l'inéquation

● b. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.

● c. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

1) $\frac{2x+1}{x+2}\geq 3$

● a. On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $x+2\neq 0$ qui signifie que : $x\neq -2$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-2\}$

● b. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.

$\frac{2x+1}{x+2}\geq 3$ Signifie que : $\frac{2x+1}{x+2}-3\geq 0$ Signifie que : $\frac{2x+1}{x+2}-\frac{3(x+2)}{x+2}\geq 0$

Signifie que : $\frac{2x+1-3x-6}{x+2}\geq 0$ Signifie que : $\boxed{\frac{-x-5}{x+2}\geq 0}$

● c. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

$-x-5=0$ Équivaut à : $x=-5$ et $x+2=0$ qui signifie que : $x=-2$

Remarque : - 2 est une valeur interdite car elle annule le dénominateur $x+2$

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-x-5}{x+2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

On cherche à résoudre l'inéquation : $\frac{-x-5}{x+2}\geq 0$

Donc : $S=[-5,-2[$

2) $4x^2-7x-2>0$

Le trinôme : $4x^2-7x-2$ a deux racines : $x_1=-\frac{1}{4}$ et $x_2=2$ (voir les questions précédentes)

Tableau de signe :

x	$-\infty$		$-1/4$		2		$+\infty$
$4x^2-7x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[\cup]2,+\infty[$

Exercice04 : $3,5pts(0,5pts+0,5pts\times 6)$

Soit le trinôme (T) : $-2x^2+\sqrt{2}x+2$

1) Prouver que le trinôme (T) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) : $a=-2$; $b=\sqrt{2}$ et $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times 2\times(-2)=2+16=18>0$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (T) : a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha\times\beta=\frac{2}{-2}=-1$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$ c'est-à-dire : $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

On a : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$ donc $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{-1}=-\frac{5}{2}$

On a : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ donc $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

donc $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

donc $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=\frac{\sqrt{2}^3}{2^3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8}=\frac{14\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

Exercice05 : $(2pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\-3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=17\end{cases}$

Solution : Pour que le système existe il faut que : $x\geq 0$ et $y\geq 0$ on pose : $X=\sqrt{x}$ et $Y=\sqrt{y}$

Le système devient : $\begin{cases}2X+Y=6\\-3X+5Y=17\end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X=1$ et $Y=4$

Donc : $\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=4$ donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=(1)^2$ et $\left(\sqrt{y}\right)^2=4^2$

Donc : $x=1$ et $y=16$ par suite : $S=\{(1,16)\}$

Exercice06 : $3,5pts(0,5pts+1pts+1pts+1pts)$ On considère l´équation : (E) :

$6x^3+25x^2+21x-10=0$

1) Montrer que le nombre -2 est solution de (E)

2) Déterminer trois réels : a, b et c tels que : $6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(ax^2+bx+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $6x^3+25x^2+21x-10>0$

Solution : 1) On remarque que

$6\times(-2)^3+25\times(-2)^2+21\times(-2)-10=-48+100-42-10=100-100=0$

Donc : le nombre -2 est solution de (E)

2) le nombre -2 est solution de (E) donc il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que :

$6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(ax^2+bx+c)$

Or, $(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=6 \\ b+2a=25 \\ c+2b=21 \\ 2c=-10 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=6 \\ b=13 \\ c=-5 \end{cases}$

Donc : $6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(6x^2+13x-5)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$6x^3+25x^2+21x-10=0$ Equivaut à : $(x+2)(6x^2+13x-5)=0$

Equivaut à : $x+2=0$ ou $6x^2+13x-5=0$

Equivaut à : $x=-2$ ou $6x^2+13x-5=0$

Le discriminant de : $6x^2+13x-5=0$ est : $\Delta=13^2-4\times6\times(-5)=169+120=289=17^2$ et ses solutions sont :

$x_1=\frac{-13-\sqrt{289}}{2\times6}=\frac{-13-17}{12}=\frac{-30}{12}=-\frac{5}{2}$ et $x_2=\frac{-13+\sqrt{289}}{2\times6}=\frac{-13+17}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\left\{-\frac{5}{2};-2;\frac{1}{3}\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $6x^3+25x^2+21x-10>0$

On a : $6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(6x^2+13x-5)$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-5/2$		-2		$1/3$		$+\infty$
$6x^2+13x-5$		+	0	−	|	−	0	+	
$x+2$		−	0	−	0	+	|	+	
$p(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=\left]-\frac{5}{2},-2\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

Exercice07 : $2pts(1pts+1pts)$ On a : $\tan(x)=\frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Calculer : 1) $\cos x$ 2) $\sin x$

Solution : 1) on a : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$ donc $1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ c'est-à-dire : $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $10\cos^2 x=9$ c'est-à-dire : $\cos^2 x=\frac{9}{10}$

Donc $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ et $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a $\frac{\pi}{2}<x<\pi$: donc $\cos x\leq 0$ et par suite : $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) On a $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$: donc $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $\sin x=-\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien