Correction : Devoir surveillé n°3 :E sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : $5pts(1pts+1,5pts+2,5pts)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $x^3-7x=0$ 2) $\frac{x^2-x}{x-1}=2x+3$ 3) $\frac{1}{x}<\frac{1}{2x-1}$

Corrigé :1) $x^3-7x=0$ équivalent à : $x\left(x^2-7\right)=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2-7=0$

Équivalent à $x=0$ ou $x^2=7$ Équivalent à : $x=0$ ou $x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$

D'où : $S=\left\{-\sqrt{7};0;\sqrt{7}\right\}$

2) (E) : $\frac{x^2-x}{x-1}=2x+3$

● a. On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette équation est définie si et seulement si $x-1\neq 0$ qui signifie que : $x\neq 1$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E=\mathbb{R}-\{1\}$

● b. On résoud l'équation :

$\frac{x^2-x}{x-1}=2x+3$ Signifie que : $x^2-x=(x-1)(2x+3)$

Signifie que : (F') $x^2+2x-3=0$

Le discriminant de : (F') x^2+2x-3 est : $\Delta=16$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-2-4}{2}=-3\in D_E$ et $x_2=\frac{-2+4}{2}=1\notin D_E$; donc l'´équation (E1) a une unique solution

Donc : $S=\{-3\}$

3)Méthode : Pour résoudre une inéquation du type :

A(x) ≥ B(x) (ou A(x) > B(x) ou A(x) ≤ B(x) ou A(x)

● a. On déterminer le domaine de définition de l'inéquation

● b. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.

● c. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

$\frac{1}{x}<\frac{1}{2x-1}$

● a. On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $x\neq 0$ et $2x-1\neq 0$qui signifie que : $x\neq 0$ ou $x\neq\frac{1}{2}$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$

● b. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.

$\frac{1}{x}<\frac{1}{2x-1}$ Signifie que : $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x-1}<0$ Signifie que : $\frac{2x-1}{x(2x-1)}-\frac{x}{x(2x-1)}<0$

Signifie que : $\frac{2x-1-x}{x(2x-1)}<0$ Signifie que : $\boxed{\frac{x-1}{x(2x-1)}<0}$

● c. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

$x-1=0$ Équivaut à : $x=1$ et $2x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{2}$

Remarque : 0 et $\frac{1}{2}$ sont des valeurs interdites car elle annule les dénominateurs x et $2x-1$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x(2x-1)}$		$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

On cherche à résoudre l'inéquation : $\frac{x-1}{x(2x-1)}<0$

Donc : $S=]-\infty,0[\cup\left]\frac{1}{2},1\right[$

Exercice02 : $3,5pts(0,5pts+1pts+2pts)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $|x-1|=2$ 2) $|-x+1|\leq 3$ 3) $|x-1|+|2-x|-3=0$

Corrigé :1) $|x-1|=2$ Signifie que : $x-1=2$ ou $x-1=-2$

Signifie que : $x=3$ ou $x=-1$ Donc : $S=\{-1;3\}$

2)Règle : $|x-a|\leq r$ est équivalente à : $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|-x+1|\leq 3$ Signifie que : $-3\leq -x+1\leq 3$

Signifie que : $-3-1\leq -x+1-1\leq 3-1$

Signifie que : $-4\leq -x\leq 2$

Signifie que : $-2\leq x\leq 4$

Donc : $S=[-2;4]$

3) $|x-1|+|3-x|-3=0$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$ et $3-x=0$ Signifie que : $x=3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	0	$x-1$		$x-1$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\lvert 3-x\rvert$	$3-x$		$3-x$	0	$x-3$
$\lvert x-1\rvert+\lvert 3-x\rvert-3$	$1-2x$		-1		$2x-7$

Si : $x\leq 1$ alors : L'équation $|x-1|+|3-x|-3=0$ devient : $-(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $4-2x-3=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{1}{2}\leq 1$; Donc : $S_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Si : $1\leq x\leq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $-1=0$ Donc : $S_2=\varnothing$

Si : $x\geq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)-(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $2x-7=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{7}{2}\geq 3$ Donc : $S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$

Exercice03 : $8,5pts(0,5pts+1,5pts+1pts+1pts+1pts+0,5pts+1pts+1,5pts)$

Soit le polynôme suivant : $P(x)=x^3+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\right)x^2+\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)x-4\sqrt{6}$

1) Montrer que -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ et soit Δ son discriminant

a) vérifier que : $\Delta=14+4\sqrt{6}$ et compléter : $14+4\sqrt{6}=(...+....)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

Solution : 1) $P(-2)=(-2)^3+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\right)(-2)^2+\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)(-2)-4\sqrt{6}$

$P(-2)=-8+8\sqrt{3}-4\sqrt{2}+8-8\sqrt{3}+4\sqrt{2}+4\sqrt{6}-4\sqrt{6}=0$

-2 est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)=x^3+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x^2-2\sqrt{6}x+2x^2+2\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-4\sqrt{6}$

$=x^3+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\right)x^2+\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)x-4\sqrt{6}=P(x)$

3) a) On pose : $Q(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ et soit Δ son discriminant :

$a=1$; $b=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $c=-2\sqrt{6}$ et $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-4\times\left(-2\sqrt{6}\right)\times 1$

$\Delta=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2+8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=12+4\sqrt{6}+2=14+4\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$\Delta=12+4\sqrt{6}+2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2$ Par suite : $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

3)b) $Q(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ et $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

Puisque : $\Delta\succ 0$ donc il y'a deux racines : $x_1=\dfrac{-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}{2\times 1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

ET $x_2=\dfrac{-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}{2\times 1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

Or on a : $2\sqrt{3}+\sqrt{2}\succ 0$ par suite : $\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Donc: $x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=-2\sqrt{3}$ Par suite: $S=\left\{-2\sqrt{3},\sqrt{2}\right\}$

4) $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Est équivalente à : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc : $X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

Mais d'après 3) b) on a : $X_1=-2\sqrt{3}$ et $X_2=\sqrt{2}$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=\sqrt{2}$

Or $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solution

Donc: $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ qui Signifie que: $x_2=2$ Par suite: $S=\{2\}$

5) $Q(x)\geq 0$ on a $x_1=\sqrt{2}$ et $x_2=-2\sqrt{3}$

Donc: le tableau de Signe est:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

6) On a : $P(x)=(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)$

$P(x)=0$ Signifie: $x+2=0$ ou $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

Signifie: $x_0=-2$ ou $x_1=\sqrt{2}$ ou $x_2=-2\sqrt{3}$ Donc: $S=\left\{-2,\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

7) $P(x)\leq 0$ Signifie: $(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)\leq 0$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left]-\infty; -2\sqrt{3}\right] \cup \left[-2; \sqrt{2}\right]$

Exercice04 : $(3pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3y^2 = 15 \end{cases}$

Solution : On pose : $X = x^2$ et $Y = y^2$

Le système devient : $\begin{cases} 2X - 5Y = 1 \\ 4X + 3Y = 15 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X = 3$ et $Y = 1$

Donc : $x^2 = 3$ et $y^2 = 4$

Donc : $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ et $y = \sqrt{1}$ ou $y = -\sqrt{1}$

Donc : $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ et $y = 1$ ou $y = -1$

Par suite : $S = \left\{\left(\sqrt{3},1\right),\left(\sqrt{3},-1\right),\left(-\sqrt{3},1\right),\left(-\sqrt{3},-1\right)\right\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien