Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 :F sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : $4,5pts(1pts+1pts+2,5pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2-3x+2=0$ b) $y^2-5y+6=0$

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}^2$ du système suivant : $\begin{cases}(x^2-3x+1)+(y^2-5y+4)=-3\\ 2(x^2-3x+1)-3(y^2-5y+4)=4\end{cases}$

Solution : a) On résolve l'équation : $x^2-3x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(2)=1>0$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

Donc : $S=\{1;2\}$

b) On résolve l'équation $y^2-5y+6=0$: $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$

Donc : $y_1=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}=3$ et $y_2=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}=2$

Donc : $S=\{2;3\}$

2)On pose : $X=x^2-3x+1$ e $Y=y^2-5y+4$t

Le système devient : $\begin{cases}X+Y=-3\\ 2X-3Y=4\end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X=-1$ et $Y=-2$

Donc : $x^2-3x+1=-1$ et $y^2-5y+4=-2$ c'est-à-dire : $x^2-3x+2=0$ et $y^2-5y+6=0$

Donc : $S=\{(1;2);(1;3)(2;2);(2;3)\}$

Exercice02 : $8,5pts(1,5pts+1,5pts+1pts+1,5pts+1pts+2pts)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $x^4-2x^2+1=0$ 2) $3x^4-2x^2-1=0$ 3) $\frac{(x-3)(2x-7)}{x^2-9}=0$ 4) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq0$

5) $|3x+1|=|4x-2|$ 6) $1\leq|6x-3|\leq4$

Solution :1) $x^4-2x^2+1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons l'équation : $X^2-2X+1=0$

Δ = (-2)^2 – 4 x 1 x 1 =4 - 4 = 0

La solution double de : $X^2-2X+1=0$ est : $X=\frac{-(-2)}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ Donc on a : $x^2=1$

Donc : $x=1$ ou $x=-1$ et par suite : $S=\{-1;1\}$

2) $3x^4-2x^2-1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$

Nous obtenons l'équation : $3X^2-2X-1=0$

Δ = (-2)^2 – 4 x 3x (-1) =4 + 12 = 16

Les solutions de : $3X^2-2X-1=0$ sont : $X_1=\frac{-(-2)+4}{2\times 3}=\frac{6}{6}=1$ et $X_2=\frac{-(-2)-4}{2\times 3}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

Donc : $x^2=1$ et $x^2=\frac{-1}{3}$

Or l'équation : $x^2=\frac{-1}{3}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Donc : on a $x=1$ ou $x=-1$ par suite : $S=\{-1;1\}$

3) $\frac{(x-3)(2x-7)}{x^2-9}=0$:a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x^2-9\neq 0$

$x^2-9=0$ Signifie : $x^2=9$ signifie : $x=3$ ou $x=-3$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

b) Résolvons l'équation : $\frac{(x-3)(2x-7)}{x^2-9}=0$

$\frac{(x-3)(2x-7)}{x^2-9}=0$ Signifie : $(x-3)(2x-7)=0$

Signifie : $2x-7=0$ ou $x-3=0$ Signifie : $x=\frac{7}{2}$ ou $x=3\notin D_E$ et par suite : $S=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

4) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq 0$

a) $2x-6\neq 0$ Équivalent à : $x\neq 3$

La valeur interdite de cette inéquation est 3.

L'inéquation est donc définie sur : $D_I=\mathbb{R}-\{3\}$

On a le tableau de signe suivant :

$2x+1=0$ Équivalent à : $x=-\frac{1}{2}$

$5x-10=0$ Équivalent à : $x=2$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x-10$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{(2x-6)}$		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;3[$

5) $|3x+1|=|4x-2|$

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|3x+1|=|4x-2|$ Signifie que : $3x+1=4x-2$ ou $3x+1=-(4x-2)$

Signifie que : $-x=-3$ ou $3x+1=-4x+2$

Signifie que : $x=3$ ou $7x=1$

Signifie que : $x=3$ ou $x=\frac{1}{7}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{7};3\right\}$

6) Résolution de l'inéquation : $1\leq|6x-3|\leq 4$

$2\leq|10x+2|\leq 5$ Signifie que : $|6x-3|\leq 4$ et $|6x-3|\geq 1$

• Résolution de l'inéquation : $|6x-3|\leq 4$

$|6x-3|\leq 4$ Signifie que : $-4\leq 6x-3\leq 4$

Signifie que : $-4+3\leq 6x-3+3\leq 4+3$

Signifie que : $-1\leq 6x\leq 7$

Signifie que : $-\frac{1}{6}\leq x\leq\frac{7}{6}$

Donc : $S_1=\left[-\frac{1}{6};\frac{7}{6}\right]$

• Résolution de l'inéquation : $|6x-3|\geq 1$

$|6x-3|\geq 1$ Signifie que : $6x-3\geq 1$ ou $6x-3\leq -1$

Signifie que : $6x\geq 4$ ou $6x\leq 2$

Signifie que : $x\geq\frac{4}{6}$ ou $x\leq\frac{2}{6}$

Signifie que : $x\geq\frac{2}{3}$ ou $x\leq\frac{1}{3}$

Donc : $S_2=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$

Finalement on a : $S=S_1\cap S_2=\left[-\frac{1}{6};\frac{7}{6}\right]\cap\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[\right)$

Exercice3 : $7\,pts(2\,pts+1{,}5\,pts+1{,}5\,pts+2\,pts)$

Soit : $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$ avec : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

1) Déterminer a et b tels que :

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$

b) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12

2) On suppose que : $a=-11$ et $b=-6$

a) Factoriser $P(x)$ en produit de monôme de degré :1

b) Résoudre l'équation : $P(x)=0$

c) Résoudre l'inéquation : $P(x)\leq 0$

Solution :1) $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$ donc : $P(2)=0$

Donc : $2\times 2^3+3\times 2^2+a\times 2+b=0$ c'est-à-dire : $2a+b+28=0$ (1)

b) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12.

Donc : $P(1)=-12$ donc : $a-b+17=0\ (2)$

Donc le couple (a,b) est solution du système suivant :

$$\begin{cases} 2a+b+28=0 \\ a-b+17=0 \end{cases}$$

En résolvant le système on trouve : $a=-11$ et $b=-6$

Donc : $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2-11x-6 & x-2 \\ \hline -2x^3+4x^2 & 2x^2+7x+3 \\ \hline 7x^2-11x-6 & \\ -7x^2+14x & \\ \hline 3x-6 & \\ + \quad -3x+6 & \\ \hline \mathbf{0} & \end{array}$$

2) Factorisation de $P(x)$ dans ce cas :

$P(x)$ Soit divisible par $x-2$ donc : $P(x)=(x-2)(2x^2+7x+3)$

$Q(x)=2x^2+7x+3$; $\Delta=b^2-4\times a\times c=(7)^2-4\times 2\times 3=49-24=25>0$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{12}{4}=-3$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7+\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc : $Q(x)=2(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+3)(2x+1)$

Par suite : $P(x)=(x-2)(x+3)(2x+1)$

b) Résolution de l'équation : $P(x)=0$

$P(x)=0$ Signifie que : $(x-2)(x+3)(2x+1)=0$

Signifie que : $x-2=0$ ou $x+3=0$ ou $2x+1=0$

Signifie que : $x=2$ ou $x=-3$ ou $x=-\frac{1}{2}$

D'où : $S=\left\{-3;-\frac{1}{2};2\right\}$

c) Résolution de l'inéquation : $P(x)\leq 0$

$P(x)=(x-2)(2x^2+7x+3)$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$x-2$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-3\right]\cup\left[-\frac{1}{2};2\right]$

Exercice04 : $(1pts)$ Donner une équation du second degré qui a pour solutions : $\alpha=1$ et $\beta=-2$

Solution : On sait que : Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors ils sont solutions de

l'équation : $x^2-sx+p=0$ avec : $\begin{cases} x+y=s \\ x\times y=p \end{cases}$

On a : $\alpha=1$ et $\beta=-2$ solutions de l'équation du second degré donc : $x^2-(1+(-2))x+1\times(-2)=0$

C'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien