Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 : G sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice15 :

1) $\frac{x^2-3x+4}{x+5}=2$ 2) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ 3) $2x^4-3x^2+\frac{9}{8}=0$ 4) $\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$

5) $|5x+2|=8$ 6) $-2|-2x+1|=3$ 7) $|2x+1|=|3x-4|$ 8) $|2x-3|\leq 1$

Solution :1) Partie1 : L'ensemble de définition de l'équation (E) est donc $D_E=\{-5\}$.

Partie2 : $\frac{x^2-3x+4}{x+5}=2$ Equivaut à : $\frac{x^2-3x+4}{x+5}-2=0$

Equivaut à : $\frac{x^2-3x+4}{x+5}-\frac{2x+10}{x+5}=0$

Equivaut à : $\frac{x^2-5x-6}{x+5}=0$

Equivaut à : $x^2-5x-6=0$

Δ = 49 > 0 donc $x^2-5x-6=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1=-1$ et $x_2=6$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est S = {−1 ; 6} (car les solutions trouvées sont différentes de −5).

2) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$: Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$:

a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$ Donc :Δ = b² – 4ac = (-3)² – 4 x 2 x $\frac{9}{8}$ = 0.

Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

3) $2x^4-3x^2+\frac{9}{8}=0$ signifie que : $2\left(x^2\right)^2-3x^2+\frac{9}{8}=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons l'équation :

$2X^2-3X+\frac{9}{8}=0$: Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double):

$X_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$

Donc on a : $x^2=\frac{3}{4}$ par suite : $x=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

4) $\frac{5x-2}{1+3x} \geq 0$ (Signe d'un quotient méthode)

- Donner l'ensemble de définition.
- Rechercher les valeurs de x annulant chacun des facteurs et Dresser un tableau de signes :

Le quotient de deux nombres de même signe est positif (+).
Le quotient de deux nombres de signes différents est négatif

Cette inéquation existe si $1+3x \neq 0$

$1+3x=0$ Équivalent à : $x=-\frac{1}{3}$

La valeur interdite de cette inéquation est $-\frac{1}{3}$. L'inéquation est donc définie sur $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

$5x-2=0$ Équivalent à : $x=\frac{2}{5}$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$5x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$1+3x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Attention : à ne pas oublier la double barre pour la valeur interdite : donc : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$

5) Résolution de l'équation : $|5x+2|=8$

On a les équivalences suivantes :

$|5x+2|=8$ Signifie que : $5x+2=8$ ou $5x+2=-8$

Signifie que : $5x=6$ ou $5x=-10$

Signifie que : $x=\frac{6}{5}$ ou $x=-2$

Donc : $S=\left\{-2;\frac{6}{5}\right\}$

6) Résolution de l'équation : $-2|-2x+1|=3$

$-|-2x+1|=2$ Signifie que : $|-2x+1|=-\frac{3}{2}$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative
Donc : $S=\varnothing$

7) Résolution de l'équation : $|2x+1|=|3x-4|$

Égalité de deux valeurs absolues :
<u>Règle :</u> L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b
Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|2x+1|=|3x-4|$ Signifie que : $2x+1=3x-4$ ou $2x+1=-(3x-4)$

Signifie que : $-x=-5$ ou $2x+1=-3x+4$
Signifie que : $x=5$ ou $5x=3$
Signifie que : $x=5$ ou $x=\frac{3}{5}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{5};5\right\}$

8) Résolution de l'inéquation : $|2x-3|\leq 1$

Règle : $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|2x-3|\leq 1$ Signifie que : $-1\leq 2x-3\leq 1$

Signifie que : $-1+3\leq 2x-3+3\leq 1+3$

Signifie que : $2\leq 2x\leq 4$

Signifie que : $1\leq x\leq 2$

Donc : $S=[1;2]$

Exercice09 : $3,5pts(0,5pts+1,5pts+1,5pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante : $\sqrt{x^2+1}=1$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x-y=-8 \\ 4x+3y=31 \end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2+8=0 \\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62 \end{cases}$

Solution : 1) $\sqrt{x^2+1}=1$ équivalent : $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=1^2$ équivalent : $x^2+1=1$ équivalent : $x^2=0$

Équivalent : $x=0$

Donc : $S=\{0\}$

2) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x-y=-8 \\ 4x+3y=31 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=-8 \\ 4x+3y=31 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y=x+8 \\ 4x+3(x+8)=31 \end{cases}$ équivalent : $\begin{cases} y=x+8 \\ 4x+3x+24=31 \end{cases}$

Équivalent : $\begin{cases} y=x+8 \\ 7x=7 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y=1+8 \\ x=1 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y=9 \\ x=1 \end{cases}$

La solution du système est donc : $S=\{(1,9)\}$

3) Déduction des questions précédents des solutions du système : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2+8=0 \\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62 \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2+8=0 \\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2=-8 \\ 2\left(4\sqrt{x^2+1}+3y^2\right)=62 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2=-8 \\ 4\sqrt{x^2+1}+3y^2=31 \end{cases}$

On pose : $\begin{cases} X=\sqrt{x^2+1} \\ Y=y^2 \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} X-Y=-8 \\ 4X+3Y=31 \end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=1$ et $Y=2$

Donc : $\sqrt{x^2+1}=1$ et $y^2=9$

Donc : ($x=0$) et ($y=-3$ ou $y=3$) Par suite : $S=\{(0,3);(0,-3)\}$

Exercice03 : $8,5pts(1pts+1pts+1pts+1\,pts+1pts+0.5pts+1\,pts+2\,pts)$

On considère les polynômes : $P(x)=-4x^3+8x^2+25x-14$ et $Q(x)=-4x^2+16x-7$

1) a) Démontrer, sans effectuer la division euclidienne, que $P(x)$ est divisible par $x+2$

b) Démontrer en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x+2)Q(x)$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

b) En déduire une factorisation de $Q(x)$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

3)a) Calculer : $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}}{-4x^2+16x-7}\leq 0$

Solution :1) $P(x)=-4x^3+8x^2+25x-14$ et $Q(x)=-4x^2+16x-7$

1) a) On a : $P(-2)=-4\times(-2)^3+8(-2)^2+25\times(-2)-14=32+32-50-14=64-64=0$

Donc : -2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x+2$

b) Démontrons en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x+2)Q(x)$

En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ on trouve :

$$\begin{array}{llll|l}
-4x^3 & +8x^2 & +25x & -14 & x+2 \\ \cline{5-5}
-(-4x^3 & -8x^2) & & & -4x^2+16x-7 \\ \cline{1-2}
+0x^3 & +16x^2 & +25x & & \\
 & -(+16x^2 & +32x) & & \\ \cline{2-3}
 & +0x^2 & -7x & -14 & \\
 & & -(-7x & -14) & \\ \cline{3-4}
 & & +0 & &
\end{array}$$

On a donc : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec $Q(x)=-4x^2+16x-7$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $Q(x)=0$:

$-4x^2+16x-7=0$

Le discriminant de : $-4x^2+16x-7=0$ est : $\Delta=(16)^2-4\times(-7)\times(-4)=144=12^2>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-16+12}{2\times(-4)}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-16-12}{2\times(-4)}=\dfrac{-28}{-8}=\dfrac{7}{2}$ Par conséquent : $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right\}$

b) Déduction d'une factorisation de $Q(x)$:

$Q(x)=-4x^2+16x-7$ Admet deux racines : $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{7}{2}$

Donc : $Q(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{7}{2}\right)=-2\times2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{7}{2}\right)=-(2x-1)(2x-7)$

c) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x)=0$

$P(x)=0$ Signifie que : $(x+2)Q(x)=0$ Signifie que : $x+2=0$ ou $Q(x)=0$

Signifie que : $x_0 = -2$ ou $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{7}{2}$ Par conséquent : $S = \left\{-2; \frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right\}$

3)a) Calculons : $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\times\sqrt{3}\times 1 + 1^2 = 3+1+2\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3}$

b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

Le discriminant de : $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$ est :

$\Delta = b^2-4ac = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 - 4\times\left(-\sqrt{3}\right)\times 1 = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 + 4\sqrt{3}$

$\Delta = 1^2 - 2\times 1\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 4\sqrt{3} = 1^2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$

Donc : il y'a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 1} = \dfrac{\sqrt{3}-1+\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times 1}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 1} = \dfrac{\sqrt{3}-1-\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times 1}$

Or: $1+\sqrt{3} \succ 0$ Donc: $\left|1+\sqrt{3}\right| = 1+\sqrt{3}$

Donc: $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}}{2\times 1} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{2\times 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Par suite : $S = \left\{-1, \sqrt{3}\right\}$

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\dfrac{x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}}{-4x^2+16x-7} \le 0$

$Q(x) = -4x^2+16x-7$ admet deux racines : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{7}{2}$

Et $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ admet deux racines : $x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$-4x^2+16x-7$		−	|	−	0	+	|	+	0	−	
$\frac{(x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3})}{-4x^2+16x-7}$		−	0	+	||	−	0	+	||	−	

Par suite : $S = \left]-\infty;-1\right] \cup \left]\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right] \cup \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien