Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 :H sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : $5pts(1pts+1pts\times 4)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $2x^2-3x-2=0$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

a) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ b) $2x^2-3|x|-2=0$ c) $2x^4-3x^2-2=0$ d) $2x^3-3x^2=2x$

Solution :1) $2x^2-3x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x-2=0$:a = 2, b = -3 et c = - 2

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$ Donc : $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

2)a) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ avec $x\geq 0$

$2x-3\sqrt{x}-2=0$ Signifie : $2\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-2=0$

Car $\sqrt{x}^2=x$ et faisons un changement de variable

En posant : $X=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$ Signifie que : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{x}=2$

Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$

C'est-à-dire : $x=4$ et par suite : $S=\{4\}$.

2) b) $2x^2-3|x|-2=0$

Signifie que : $2|x|^2-3|x|-2=0$ car $|x|^2=x^2$

Faisons un changement de variable en posant : $X=|x|$ nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a: $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$

Qui est équivalent à : $|x|=-\frac{1}{2}$ ou $|x|=2$

Mais l'équation : $|x|=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x|=2$ Signifie que : $x=2$ ou $x=-2$

Par suite $S=\{-2;2\}$

2) c) $2x^4-3x^2-2=0$ Signifie que : $2\left(x^2\right)^2-3x^2-2=0$

Faisons un changement de variable

On pose : $X=x^2$ nous obtenons donc : L'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$

Par suite : $x^2=-\frac{1}{2}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2=2$ Signifie : $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

d) $2x^3-3x^2=2x$ équivalent à: $2x^3-3x^2-2x=0$

Signifie que : $x\left(2x^2-3x-2\right)=0$ Signifie que : $x=0$ ou $2x^2-3x-2=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x_1=-\frac{1}{2}$ ou $x_2=2$

Par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2};0;2\right\}$.

Exercice02 : $9\,pts(1pts+1pts+1pts+1\,pts+2\,pts+1pts+2\,pts)$

Soit : $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$ Montrer que : $P(x)=(x-3)Q(x)$

Avec : $Q(x)=2x^2+x-1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\succ 0$

Solution :1) $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

On a $P(3)=2\times 3^3-5\times 3^2-4\times 3+3=54-45-12+3=0$ donc 3est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$

$$\begin{array}{rr|l} + & 2x^3-5x^2-4x+3 & x\text{-}3 \\ & -2x^3+6x^2 \qquad\qquad & \\ \hline & x^2-4x+3 & 2x^2+x-1 \\ & -x^2+3x \qquad & \\ \hline & -x+3 & \\ & x-3 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

On trouve : $P(x)=(x-3)Q(x)$ ① et $Q(x)=2x^2+x-1$

3) On a : $Q(x)=2x^2+x-1$ et $Q(x)=0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1+8 = 9$

Donc : $x_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 2}=-1$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 2}=\frac{1}{2}$

Par suite : $S=\left\{-1,\,{}^{1}\!/_{2}\right\}$

4) $Q(x)\geq 0$ On a $x_1=-1$ et $x_2=\frac{1}{2}$ sont racines du polynôme $Q(x)$

Donc: le tableau de Signe:

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc: $S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x-3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+x-1$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=-1$ et $x_2=\frac{1}{2}$

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)=(2x-1)(x+1)$ par suite : $P(x)=(x-3)(2x-1)(x+1)$

6) On a : $P(x)=(x-3)(2x-1)(x+1)$

$P(x)=0$ Signifie : $(x-3)(2x-1)(x+1)=0$

Signifie : $x-3=0$ ou $2x-1=0$ ou $x+1=0$

Signifie : $x=3$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-1$ par suite : $S=\mathbb{R}-\left\{-3,-1,\frac{1}{2}\right\}$

7) $P(x)\succ 0$ Signifie: $(x-3)Q(x)\succ 0$:D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S=\left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

Exercice03 : $6pts(0,5pts\times 12)$

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(I)\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

On pose : $\Delta=\begin{vmatrix}m+2 & 1\\9 & m+2\end{vmatrix}$ et $\Delta_x=\begin{vmatrix}m+1 & 1\\6 & m+2\end{vmatrix}$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix}m+2 & m+1\\9 & 6\end{vmatrix}$

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta=(m-1)(m+5)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles : $\Delta=0$

2) Vérifier que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

3) On suppose que : $m\neq 1$ et $m\neq -5$

a) Montrer que le système (I) admet un couple unique comme solution.

b) Résoudre le système (I) avec simplification des résultats.

c) En déduire la résolution du système : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (3).

b) Quel est le nombre de solution du système (3).

c) Résoudre le système (3)

5) On suppose que : $m=-5$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (4).

b) Quel est le nombre de solution du système (4).

c) Résoudre le système (4)

Solution :1) a) On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta=\begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 9 & m+2 \end{vmatrix}=(m+2)\times(m+2)-9\times1=(m+2)^2-3^2=(m+2-3)(m+2+3)=(m-1)(m+5)$$

b) $\Delta=0$ Signifie que : $(m-1)(m+5)=0$ Signifie que : $m-1=0$ ou $m+5=0$

$\Delta=0$ Signifie que : $m=1$ ou $m=-5$

2) Vérifions que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 6 & m+2 \end{vmatrix}=(2+m)(1+m)-6=m^2+2m+m+2-6=m^2+3m-4$$: a = 1, b = 3 ; c = -4

Le discriminent est : $b^2 - 4ac = 3^2 + 16 = 25 > 0$

Donc : $m_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2a}=\frac{-3-5}{2\times1}=\frac{-8}{2}=-4$ et $m_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2a}=\frac{-3+5}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

Donc : $\Delta_x=m^2+3m-4=1(m-(-4))(m-1)=(m+4)(m-1)$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}=6(2+m)-9(1+m)=12+6m-9m-9=3-3m=-3(m-1)$$

3) On suppose que : $m\neq1$ et $m\neq-5$; Dans ce *cas* : $\Delta\neq0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{(m-1)(m+4)}{(m-1)(m+5)}=\frac{m+4}{m+5} \quad \text{et} \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-3(m-1)}{(m-1)(m+5)}=-\frac{3}{m+5}$$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{m+4}{m+5};-\frac{3}{m+5}\right)\right\}$

c) Déduction de la résolution du système : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

On pose : $m=-3$ dans : $(I)\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$ on obtient : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

Et puisque: $-3\neq1$ et $-3\neq-5$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{-3+4}{-3+5};-\frac{3}{-3+5}\right)\right\}$ c'est-à-dire : $S=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)\right\}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecriture du système dans ce cas, on le note (3) :

Si $m=1$ alors $\Delta=0$

On remplace m par 1 dans $\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$: on trouve : $(3)\begin{cases}3x+y=2\\9x+3y=6\end{cases}$

Qui est équivalent à : $(3)\ \begin{cases}3x+y=2\\3x+y=2\end{cases}$

Qui est équivalent à (3): $3x+y=2$

b) Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation (3): $3x+y=2$

Ce système a une infinité de solutions
c) $3x+y=2$ est équivalent a : $y=2-3x$

Alors on a : $S=\{(x;2-3x)/x\in\mathbb{R}\}$

5) On suppose que : $m=-5$

a) Si $m=-5$ alors $\Delta=0$

On remplace m par -5 dans $\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$ on trouve : $\begin{cases}-3x+y=-4\\9x-3y=6\end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases}3x-y=4\\3x-y=2\end{cases}$

b) $(3)\ \begin{cases}3x-y=4\\3x-y=2\end{cases}$ impossible

Ce système n'a pas de solutions
c) $S=\varnothing$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien