http://www.xriadiat.com **DS3: I** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 :I sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d’inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d’équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : $4,5\,pts(1\,pts\times 3+1,5\,pts)$

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $\left|-x+1\right|\le 3$ 1) $\left|x-9\right|\ge \frac{1}{2}$ 3) (G) : $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ 4) $\frac{2x+6}{x^2-4x-96}<0$

Corrigé : 1) Résolution de l’inéquation : $\left|-x+1\right|\le 3$

Règle : $\left|x-a\right|\le r$ **est équivalente à :** $-r\le x-a\le r$ avec $r>0$

D’après notre règle, on a donc :

$\left|-x+1\right|\le 3$ Signifie que : $-3\le -x+1\le 3$

Signifie que : $-3-1\le -x+1-1\le 3-1$

Signifie que : $-4\le -x\le 2$

Signifie que : $-2\le x\le 4$

Donc : $S=\left[-2;4\right]$

2) Résolution de l’inéquation : $\left|x-9\right|\ge \frac{1}{2}$

Règle : $\left|x-a\right|>r$ **est équivalente à :** $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$\left|x-9\right|\ge \frac{1}{2}$ Signifie que : $x-9\ge \frac{1}{2}$ ou $x-9\le -\frac{1}{2}$

Signifie que : $x\ge \frac{1}{2}+9$ ou $x\le -\frac{1}{2}+9$

Signifie que : $x\ge \frac{19}{2}$ ou $x\le -\frac{17}{2}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{17}{2}\right]\cup\left[\frac{19}{2};+\infty\right[$

3) (G) : $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$

● a). On va déterminer le domaine de définition de l’équation :

Cette équation est définie si et seulement si $x\ne 0$

Donc : le domaine de définition de l’équation est : $D_G=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

● b) On résoud l’équation :

$\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ Signifie que : $x^2=x$ Signifie que : $x^2-x=0$ Signifie que : $x(x-1)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$

Signifie que : $x=0\notin D_G=\mathbb{R}^*$ ou $x=1$

Donc : l’´équation (G) a une unique solution

Donc : $S=\{1\}$

4) $\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}<0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :
Cette inéquation est définie si et seulement si $-x^2+4x+96\neq 0$
On commence par déterminer les racines du trinôme $-x^2+4x+96$:
Le discriminant de $-x^2+4x+96$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 96 \times (-1) = 400$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-4+\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4+20}{-2}=\frac{16}{-2}=-8$ et $x_2=\frac{-4-\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4-20}{-2\times 1}=\frac{-24}{-2}=12$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$	-8		-3		12		$+\infty$
$2x+6$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+4x+96$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=]-8;-3]\cup]12;+\infty[$.

Exercice02 : $3,5pts(0,5pts+1,5pts+1,5pts)$

Soit $P(x)=x^3-x^2-4x+4$

1) Déterminer une racine évidente de $P(x)$

2) Déterminer alors la factorisation de P.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x)>0$

Corrigé :1) Remarque : Pour déterminer des racines évidentes, on peut :
Remplacer l'inconnue par des valeurs entières de x comprises entre −5 et 5 et trouver
Celle(s) qui annule(nt) le polynôme.
On remarque que $P(1)=0$ donc 1 est une racine évidente de $P(x)$.

2)Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $P(x)=(x-1)Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il éxiste trois réels a, b et c tels que $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

Or, $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=1 \\ b-a=-1 \\ c-b=-4 \\ -c=4 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}$

Donc : $P(x)=(x-1)(x^2-4)=(x-1)(x^2-2^2)=(x-1)(x-2)(x+2)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x)>0$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de P(x) > 0 est : $S =]-2,1[\cup]2,+\infty[$

Exercice03 : $9\,pts(0,5\,pts+1,5\,pts+0,5\,pts+1,5\,pts+2\,pts+1\,pts+2\,pts)$

Soit le polynôme suivant (E) : $P(x) = x^3+\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}$

1) Montrer que -1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x-\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\le 0$

Solution : 1) $P(x)=x^3+\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}$

On a : $P(-1)=(-1)^3+\sqrt{3}(-1)^2-(-1)-\sqrt{3}$

$P(-1)=-1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=0$ Donc : -1 est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}\right)=x^3-\left(1-\sqrt{3}\right)x^2-\sqrt{3}x+x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$

$=x^3-x^2+\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}x+x^2-x+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=x^3+\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}=P(x)$

3) a) $Q(x)=x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ $a=1$ et $b=-\left(1-\sqrt{3}\right)$ et $c=-\sqrt{3}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times\left(-\sqrt{3}\right)\times 1=\left(1-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}$

$\Delta=1^2-2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2+4\sqrt{3}=1^2+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

b) $Q(x)=x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ Puisque : $\Delta\succ 0$

Donc : il y'a deux racines : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{1-\sqrt{3}+\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times1}$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}-\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{1-\sqrt{3}-\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times1}$

Or: $1+\sqrt{3}\succ 0$ Donc: $\left|1+\sqrt{3}\right|=1+\sqrt{3}$

Donc: $x_1=\dfrac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2\times1}=1$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{2\times1}=-\sqrt{3}$ par suite : $S=\left\{-\sqrt{3},1\right\}$

4) $x-\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$ Est équivalente à: $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc : $X^2-\left(1-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{3}=0$

Mais d'après 3)b) on a : $X_1=-\sqrt{3}$ et $X_2=1$ qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=-\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=1$

Or $\sqrt{x_1}=-\sqrt{3}$ n'a pas de solution donc: $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=1^2$

Qui Signifie que: $x_2=1$ par suite: $S=\{1\}$

5) $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}\right)$

$P(x)=0$ Signifie: $x+1=0$ ou $x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$ Signifie: $x_0=-1$ ou $x_1=-\sqrt{3}$ ou $x_2=1$

Donc: $S=\left\{-1,1,-\sqrt{3}\right\}$

6) $P(x)\le 0$ Signifie que: $(x+1)\left(x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}\right)\le 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup[-1;1]$

Exercice04 : $(3pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases}x+y=5\\ x\times y=4\end{cases}$

Solution : méthode1 : $\begin{cases}x+y=5\\ x\times y=4\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x=5-y\\ (5-y)\times y=4\end{cases}$

On considère : $(5-y)\times y=4$ ssi $-y^2+5y=4$ c'est-à-dire : $y^2-5y+4=0$

Calculons le discriminant : a = 1, b = -5 et c = 4

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $y_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2a}=\frac{5-3}{2\times 1}=1$ et

$y_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{5+3}{2\times 1}=4$

Si $y=1$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-1=4$

Si $y=4$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-4=1$

On en déduit que : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

Méthode1 : Pour résoudre le système : $(I)\begin{cases}x+y=s\\ x\times y=p\end{cases}$ où les s , p sont des réels donnés il suffit

de résoudre L'équation : $x^2-sx+p=0$

Dans notre exercice : résoudre l'équation : $x^2-5x+4=0$

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.et on finit de la même façon que la méthode1

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien