Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 :J sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : $3,5pts(2pts+1,5pts)$ 1)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante :

$(E): x^2-|x-2|-4=0$

Solution :1) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes : $x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2+x-6=0$: a = 1, b = 1 et c = - 6

Donc :Δ = b² – 4ac = 1² – 4 x 1 x (-6) = 25.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times1}=-3$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times1}=2$ Donc : $S=\{-3;2\}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2-x-2=0$: a = 1, b = -1 et c = - 2

Donc : Δ = b² – 4ac = (-1)² – 4 x 1 x (-2) = 9.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times1}=-1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times1}=2$ Donc : $S=\{-1;2\}$

2) Déduction des solutions de l'équation suivante : $(E): x^2-|x-2|-4=0$

Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	− 0 +

Si $x\geq2$ alors $x-2\geq0$ donc : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2-(x-2)-4=0$

Signifie : $x^2-x+2-4=0$ C'est-à-dire : $x^2-x-2=0$ Or: d'après B) 1) $x_1=-1$ et $x_2=2$

Mais : $x_1=-1\notin[2;+\infty[$ donc : $S_1=\{2\}$

Si $x\prec2$ alors $x-2\leq0$

Donc : $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2+(x-2)-4=0$ C'est à dire : $x^2+x-2-4=0$

Signifie : $x^2+x-6=0$ Or: d'après B) 1) $x_1=-3$ et $x_2=2$ Mais : $x_2=2\notin]-\infty;2[$

Donc : $S_2=\{-3\}$

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\{-3;2\}$.

Exercice02 : $3,5pts(1pts+1,5pts+1pts)$

Résoudre les équations et inéquations suivantes : 1) $\frac{-x+5}{2x-6}=-3$ 2) $\frac{1}{x}>\frac{x}{x+2}$ 3) $|x-9|\geq\frac{1}{2}$

Solution : 1) $\frac{-x+5}{2x-6}=-3$: Cette équation n'existe pas si $2x-6=0$

$2x-6=0$ Équivalent à : $x=3$

La valeur interdite de cette équation est 3. L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}-\{3\}$

$\frac{-x+5}{2x-6}=-3$ Équivalent à : $-x+5=-3(2x-6)$ équivalent à : $-x+5=-6x+18$

Équivalent à : $5x=13$ équivalent à : $x=\frac{13}{5}$

Donc : $S=\left\{\frac{13}{5}\right\}$

2) $\frac{1}{x}>\frac{x}{x+2}$; On va regrouper tous les termes dans le même membre de l'inéquation :

$\frac{1}{x}>\frac{x}{x+2}$ Signifie que : $\frac{1}{x}-\frac{x}{x+2}>0$ Signifie que : $\frac{x+2-x^2}{x(x+2)}>0$ Signifie que : $\frac{-x^2+x+2}{x(x+2)}>0$

Et on va déterminer le signe du trinôme : $-x^2+x+2$

Calculons le discriminant de $-x^2+x+2$: $a=-1;\ b=1\ ;\ c=2$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times 2(-1)=1+8=9>0$

Comme $\Delta>0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{2a}=\frac{-4}{2\times(-1)}=2$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{2a}=\frac{2}{2\times(-1)}=-1$

$x(x+2)=0$ Signifie que : $x=0$ ou $x+2=0$ Signifie que : $x=0$ ou $x=-2$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$
$x+2-x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{x+2-x^2}{x(x+2)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=]-2;-1[\cup]0;2[$

3)Résolution de l'inéquation : $|x-9|\geq\frac{1}{2}$

Règle : $|x-a|>r$ est équivalente à : $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x-9|\geq\frac{1}{2}$ Signifie que : $x-9\geq\frac{1}{2}$ ou $x-9\leq-\frac{1}{2}$

Signifie que : $x\geq\frac{1}{2}+9$ ou $x\leq-\frac{1}{2}+9$ Signifie que : $x\geq\frac{19}{2}$ ou $x\leq-\frac{17}{2}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{17}{2}\right]\cup\left[\frac{19}{2};+\infty\right[$

Exercice03 : $2,5pts(1pts+1,5pts)$

Soit le trinôme (E) : $P(x)=2x^2-\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{15}$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$

Solution : 1 $a=2$ et $b=-\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$ et $c=\sqrt{15}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-4\times2\times\sqrt{15}=\left(2\sqrt{5}\right)^2+4\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{15}=20+4\sqrt{15}+3-8\sqrt{15}$

$\Delta=23-4\sqrt{15}\succ0$ Car : $23\succ4\sqrt{15}$ $23^2=529$ et $\left(4\sqrt{15}\right)^2=16\times15=240$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha\times\beta=\frac{\sqrt{15}}{2}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{\sqrt{23}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{5}$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc : $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\frac{23}{4}$

Exercice04 : $4,5pts(1pts+1pts+1pts+1,5pts)$

On considère l´équation : (E) : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=0$

1) Montrer que les nombre -2 et 2 sont des solutions de (E)

2) Montrer que : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4>0$

Corrigé :1) On a : $2^4+2\times2^3-5\times2^2-8\times2+4=16+16-20-16+4=0$

Donc : le nombre 2 est solution de (E)

Donc : $x-2$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

On a aussi : $(-2)^4+2\times(-2)^3-5\times(-2)^2-8\times(-2)+4=16-16-20+16+4=0$

Donc : le nombre -2 est solution de (E)

2) 2 est solution de (E) donc : $x-2$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

-2 est solution de (E) donc : $x+2$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

Par suite : $(x+2)(x-2)=x^2-4$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

Par la division euclidienne de : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$ par : x^2-4

On trouve que : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)$

Remarque : On peut simplement développer $\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)$ et essayer de trouver :
$x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$x^4+2x^3-5x^2-8x+4=0$ Equivaut à : $\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)=0$ Equivaut à : $x^2-4=0$ ou $x^2+2x-1=0$

Equivaut à : $x^2=4$ ou $x^2+2x-1=0$ Equivaut à : $x=\sqrt{4}$ ou $x=-\sqrt{4}$ ou $x^2+2x-1=0$

Equivaut à : $x=2$ ou $x=-2$ ou $x^2+2x-1=0$

Le discriminant de : $x^2+2x-1=0$ est : $\Delta=2^2-4\times1\times(-1)=4+4=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2>0$ et ses solutions sont : $x_1=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2\times1}=-1-\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2\times1}=-1+\sqrt{2}$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\left\{-1-\sqrt{2};-2;-1+\sqrt{2};2\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4>0$

On a : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$		-2		$-1+\sqrt{2}$		2		$+\infty$
x^2+2x-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2+2x-1)(x^2-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=\left]-\infty,-1-\sqrt{2}\right[\cup\left]-2,-1+\sqrt{2}\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

Exercice05 : $3,5pts(0,5pts+1,5pts+1,5pts)$ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante : $|2x+1|=1$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}3x+y=5\\2x-3y=-4\end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases}3|2x+1|+y^2=5\\2|2x+1|-3y^2=-4\end{cases}$

Solution :1) $|2x+1|=1$ équivalent : $2x+1=1$ ou $2x+1=-1$

Équivalent : $2x=0$ ou $2x=-2$

Équivalent : $x=0$ ou $x=-1$

Donc : $S=\{-1;0\}$

2) Par la méthode combinaison linéaire **:**

Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.
On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue x. Pour cela on va :
multiplier la première équation par 2 qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.
Multiplier la seconde équation par 3 qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.

On obtient alors le système : $\begin{cases}6x+2y=10\\6x-9y=-12\end{cases}$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en x.

$$\begin{array}{rrrrl} & 6x & + & 2y & = 10 \\ -(& 6x & - & 9y & = -12) \\ \hline & & & 11y & = 22 \\ & & \text{donc} & y & = 2 \end{array}$$

On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :
Si on choisit la première équation $3x+2=5$ soit $3x=3$ et donc $x=1$.
La solution du système est donc : $S=\{(1,2)\}$

3)Déduction des questions précédents des solutions du système : $\begin{cases} 3|2x+1|+y^2=5 \\ 2|2x+1|-3y^2=-4 \end{cases}$

On pose : $\begin{cases} X=|2x+1| \\ Y=y^2 \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} 3X+Y=5 \\ 2X-3Y=-4 \end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=1$ et $Y=2$
Donc : $|2x+1|=1$ et $y^2=2$
Donc : ($x=0$ ou $x=-1$) et ($y=-\sqrt{2}$ ou $y=\sqrt{2}$)
Par suite : $S=\left\{\left(0,\sqrt{2}\right);\left(0,-\sqrt{2}\right);\left(-1,-\sqrt{2}\right);\left(-1,-\sqrt{2}\right)\right\}$

Exercice06 : $(2,5pts)$ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x-3\sqrt{x}-4=0$

Corrigé : Méthode : Je pose donc $X=\sqrt{x}$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.
● On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :
Cette inéquation est définie si et seulement si $x\geq 0$
Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=[0;+\infty[$

● Résolution de l'inéquation : $x-3\sqrt{x}-4=0$ Équivaut à : $\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-4=0$

Je pose : $X=\sqrt{x}$ l'équation devienne : $X^2-3X-4=0$
Le discriminant de : $X^2-3X-4=0$ est : $\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25>0$ et ses solutions sont : $X_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$ et $X_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{8}{2}=4$

C'est-à-dire : $\sqrt{x}=-1$ impossible ou $\sqrt{x}=4$ C'est-à-dire : $x=16\in D_I$
Donc l´équation $x-3\sqrt{x}-4=0$ admet pour ensemble de solutions : $S=\{16\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien