Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 : K sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

Exercice01 : $(7\,pts)$ Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $\frac{(1-3x)(3x+18)}{2x+1}=0$ 2) $|2x+1|=|x-3|$ 3) $3|-x+2|=-1$ 4) $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$

5) $|x-1|\geq 3$ 6) $\frac{3x-1}{\sqrt{3}-3}\prec\frac{3x-2}{\sqrt{3}+3}$ 7) $\frac{x^2-6x+9}{3x^2+10x-8}\leq 0$

Solution : 1) a) $\frac{(1-3x)(3x+18)}{2x+1}=0$: On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $2x+1\neq 0$

$2x+1\neq 0$ si et seulement si $x\neq -\frac{1}{2}$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) Résolvons l'équation :

$\frac{(1-3x)(3x+18)}{2x+1}=0$ Signifie : $(1-3x)(3x+18)=0$

Signifie : $1-3x=0$ ou $3x+18=0$

Signifie : $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-6$ et par suite : $S=\left\{-6;\frac{1}{3}\right\}$

2) $|2x+1|=|x-3|$ signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$

Signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$

Signifie que : $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$ Donc : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

3) $3|-x+2|=-1$

$3|-x+2|=-1$ Signifie que : $|-x+2|=-\frac{1}{3}$; $S=\varnothing$ car $|-x+2|\geq 0$

4) $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$: On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$

$x-2=0$ Signifie : $x=2$ donc : $D_E=\mathbb{R}-\{2\}$

b) Résolvons l'équation : étudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ par suite : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x\left(x^{2}-4\right)}{(x-2)}=2$ qui signifie que: $x(x+2)=2$ c'est-à-dire : $x^{2}+x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^{2}-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^{2}-ac=1+2=3\succ 0$

Comme $\Delta' > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_{1}=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-1-\sqrt{3}$ et $x_{2}=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-1+\sqrt{3}$

Tous les deux ne sont pas supérieurs à 2 donc : $S_{1}=\varnothing$

Si $x\prec 2$ alors $x-2\prec 0$ donc : $|x-2|=-x+2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x\left(x^{2}-4\right)}{-(x-2)}=2$ qui signifie que: $x(x+2)=-2$ c'est-à-dire :

$x^{2}+2x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^{2}-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^{2}-ac=1-2=-1\prec 0$

Comme $\Delta'\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions

Donc : $S_{2}=\varnothing$ Par suite : $S=S_{1}\cup S_{2}=\varnothing$

5) $|x-1|\geq 3$

Règle : $|x-a|\geq r$ est équivalente à : $x-a\geq r$ ou $x-a\leq -r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|x-1|\geq 3$ Signifie que : $x-1\geq 3$ ou $x-1\leq -3$

Signifie que : $x\geq 4$ ou $x\leq -2$

On obtient alors l'union d'intervalle suivant : $]-\infty;-2]$ et $[4;+\infty[$

Donc : $S=]-\infty;-2]\cup[4;+\infty[$

6) $\frac{3x-1}{\sqrt{3}-3}\prec\frac{3x-2}{\sqrt{3}+3}$ Équivalent à : $\frac{3x-1}{\sqrt{3}-3}-\frac{3x-2}{\sqrt{3}+3}\prec 0$

Équivalent à : $\frac{(3x-1)\left(\sqrt{3}+3\right)-\left(\sqrt{3}-3\right)(3x-2)}{\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-3\right)}\prec 0$

Équivalent à : $\frac{18x+\sqrt{3}-9}{-6}\prec 0$

Équivalent à : $18x+\sqrt{3}-9\succ 0$

Équivalent à : $18x\succ 9-\sqrt{3}$ c'est-à-dire : $x\succ\frac{9-\sqrt{3}}{18}$ par suite : $S=\left]\frac{9-\sqrt{3}}{18};+\infty\right[$

7)a) On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation :

$D_{I}=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^{2}+10x-8\neq 0\right\}$; Calculons le discriminant de $3x^{2}+10x-8$:

$a=3$; $b=10$; $c=-8$: $\Delta=b^{2}-4\times a\times c=10^{2}-4\times 3\times(-8)=192>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme : $3x^{2}+10x-8$ possède deux racines distinctes :

$x_{1}=\frac{-10-\sqrt{196}}{2a}=\frac{-10-14}{2\times 3}=\frac{-24}{6}=-4$ et $x_{2}=\frac{-10+\sqrt{196}}{2a}=\frac{-10+14}{2\times 3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Donc $D_{I}=\mathbb{R}/\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

b) Le signe de : (I) : $\frac{x^2-6x+9}{3x^2+10x-8}$ dépend du signe des expressions : $3x^2+10x-8$ et x^2-6x+9

On a : $x^2-6x+9=x^2-2\times x\times 3+3^2=(x-3)^2\geq 0$

$x^2-6x+9=0$ Equivaut à : $(x-3)^2=0$ Equivaut à : $x-3=0$

Donc : on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
x^2-6x+9		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	
$3x^2+10x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x^2-6x+9}{3x^2+10x-8}$		$+$	||	$-$	||	$+$	0	$+$	

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : $S=\left]-4;\frac{2}{3}\right[\cup\{3\}$

Exercice02 : $4pts(1pts+1pts+1pts+1pts)$ Soit : $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

1) Déterminer une racine évidente de $F(x)$

2) Déterminer alors la factorisation de $F(x)$ en un produit de monômes du premier degré.

3) Etudier le signe de : $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $F(x)>0$

Solution :1)1) $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

On remarque que $F(-2)=0$ donc -2 est une racine évidente de $F(x)$.

2) -2 est une racine évidente de $F(x)$.Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $F(x)=(x-(-2))Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il

Existe trois réels a, b et c tels que $F(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$.

Or, $(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases}a=6\\b+2a=25\\c+2b=21\\2c=-10\end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases}a=6\\b=13\\c=-5\end{cases}$

$F(x)=(x+2)(6x^2+13x-5)$.

Le discriminant de : $6x^2+13x-5$ est : $\Delta=13^2-4\times 6\times(-5)=289=17^2$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-13-\sqrt{289}}{2\times 6}=\frac{-13-17}{12}=-\frac{5}{2}$ et $x_2=\frac{-13+\sqrt{289}}{2\times 6}=\frac{-13+17}{12}=\frac{1}{3}$

$6x^2+13x-5=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=2\times 3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(3x-1)(2x+5)$

Donc : $F(x)=(x+2)(3x-1)(2x+5)$

3) $F(x)=(x+2)(3x-1)(2x+5)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$

Qui signifie que : $x=-\frac{5}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) $F(x)>0$ Équivaut à : $x\in\left]-\frac{5}{2},-2\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

Ainsi, l'ensemble solution de $F(x)>0$ est : $S=\left]-\frac{5}{2},-2\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

Exercice03 : $(2\,pts)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) ; $x^4-2x^2-1=2$
(On pourra penser à utiliser le changement de variable : X = x²).

Corrigé :1) $x^4-2x^2-1=2$ Equivaut à : $x^4-2x^2-3=0$.

L'équation : $x^4-2x^2-3=0$ Equivaut à : $\left(x^2\right)^2-2x^2-3=0$

On pose : $X=x^2$ L'équation : $x^4-2x^2-3=0$ devienne : $X^2-2X-3=0$

Or : $\Delta=16>0$ donc P admet deux solutions distinctes $X_1=-3$ et $X_2=1$

Or $X=x^2\geq 0$ donc on ne conserve que la solution positive. $\cancel{X_1=-3}$

Donc : $X=1$ Equivaut à : $x^2=1$ Equivaut à : $x=\sqrt{1}$ ou $x=-\sqrt{1}$ Equivaut à : $x=1$ ou $x=-1$
L'ensemble solution de (E) est donc S = {−1 ; 1}.
Remarque : Les équations de degré 4 ne faisant intervenir que des puissances paires de x sont appelées des
Équations bicarrées et se résolvent toujours en faisant le changement de variables X = x² ce qui permet de se ramener à une équation de degré 2.

Exercice04 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant.
On donnera la réponse sous forme d'intervalle

1) $\begin{cases}5(2-x)\leq -7x+6\\ 3x+7\leq 4\left(x+\frac{1}{2}\right)\end{cases}$ 2) $3x-2<1-2x\leq x+3$

Corrigé :1) Soit : $x\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}5(2-x)\leq -7x+6\\ 3x+7\leq 4\left(x+\frac{1}{2}\right)\end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases}10-5x\leq -7x+6\\ 3x+7\leq 4x+2\end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases}-5x+7x\leq 6-10\\ 3x-4x\leq 2-7\end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases}2x\leq -4\\ -x\leq -5\end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases}x\leq -2\\ x\geq 5\end{cases}$ Signifie que : $x\leq -2$ *et* $x\geq 5$

Donc l'ensemble des solutions du système est : $S=\left]-\infty,-2\right]\cap\left[5;+\infty\right[=\varnothing$

2) $3x-2<1-2x\leq x+3$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $3x-2<1-2x\leq x+3$ Signifie que ; $3x-2<1-2x$ et $1-2x\leq x+3$

Signifie que ; $3x+2x<1+2$ et $-2x-x\leq 3-1$

Signifie que ; $5x < 3$ et $-3x \leq 2$

Signifie que ; $x < \frac{3}{5}$ et $x \geq -\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble des solutions du système est : $S = \left]-\infty, \frac{3}{5}\right[\cap \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right[= \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right[$

Exercice05 : $(2\,pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3y^2 = 15 \end{cases}$

Solution : On pose : $X = x^2$ et $Y = y^2$ et Le système devient : $\begin{cases} 2X - 5Y = 1 \\ 4X + 3Y = 15 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X = 3$ et $Y = 1$

Donc : $x^2 = 3$ et $y^2 = 4$

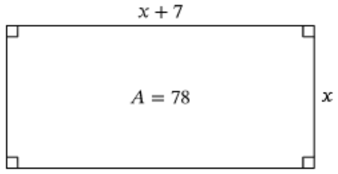
Donc : $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ et $y = \sqrt{1}$ ou $y = -\sqrt{1}$

Donc : $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ et $y = 1$ ou $y = -1$

Par suite : $S = \left\{\left(\sqrt{3}, 1\right), \left(\sqrt{3}, -1\right), \left(-\sqrt{3}, 1\right), \left(-\sqrt{3}, -1\right)\right\}$

Exercice06 : $(2\,pts)$ Quel est le périmètre d'un rectangle d'une longueur de 7 cm de plus que sa largeur et dont l'aire est de 78 cm² ?

Solution : Pour commencer, il peut être utile de réaliser un schéma représentant le scénario décrit. On sait que la longueur est de 7 cm plus longue que la largeur, on appelle donc x la largeur, en centimètres et la longueur x+7.Cela nous donne le rectangle suivant.



On sait que l'aire d'un rectangle est calculée en multipliant sa longueur par sa largeur. Ici, la longueur est x+7 et la largeur est x.

Comme l'aire vaut 78, nous pouvons utiliser cette information pour écrire l'équation suivante :

$x(x+7) = 78$

Si on utilise ensuite la propriété de distributivité pour développer les parenthèses, on obtient

$x^2 + 7x - 78 = 0$

À ce stade, nous avons une équation du second degré sous une forme qui peut être résolue. Nous pouvons vérifier si l'équation peut être factorisée ou nous pouvons la résoudre par la méthode de complétion du carré ou encore en utilisant le discriminent :

Calculons le discriminant de : $x^2 + 7x - 78 = 0$: $a = 1; b = 7 ; c = -78$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 7^2 - 4 \times 1 \times (-78) = 49 + 312 = 361 = 19^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{361}}{2a} = \frac{-7 - 19}{2 \times 1} = -13 < 0$ et $x_2 = \frac{-7 + \sqrt{361}}{2a} = \frac{-7 + 19}{2 \times 1} = 6 > 0$

Sachant que x est une longueur, elle ne peut pas être négative, alors notre solution doit être :

$x = 6 > 0$

Enfin, nous devons déterminer le périmètre du rectangle, c'est-à-dire la somme des longueurs des côtés. Nous savons que la largeur est de 6 cm et que la longueur est de 6+7=13cm, le périmètre est donc donné par : $P = 2(6 + 13) = 38cm$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien