Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 :L sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

Exercice01 : $7,5pts(1,5pts\times5)$ Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ 2) $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$ 3) $\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$ 4) $|x^2-2x+3|=2$

5) $(x-2)^2-|x-2|=0$

Solution : 1) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette l'équation est définie si et seulement si $x-2\neq0$ et $x+2\neq0$
Cette l'équation est définie si et seulement si $x\neq2$ et $x\neq-2$
Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b) Résolvons l'équation : $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ Équivalent à ; $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-5}{x-2}=0$ On peut réduire au même dénominateur les deux fractions.

Le dénominateur commun est : $(x+2)(x-2)$

$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ Équivalent à ; $\frac{(x-1)(x-2)-(x-5)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=0$

Équivalent à $\frac{x^2-2x-x+2-x^2-2x+5x+10}{(x+2)(x-2)}=0$ c'est-à-dire : $\frac{12}{(x+2)(x-2)}=0$

Donc : $12=0$ impossible
D'où : $S=\varnothing$

2) $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x-2=0$ ou $x=0$

Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x=2$ ou $x=0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2-8x+16$
Calculons son discriminant : $a=1$; $b=-8$; $c=16$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-8)^2-4\times1\times16=64-64=0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=1>0$ et $\Delta=0$, alors : $x^2-8x+16\geq0$

La racine double est : $x_1=\frac{8}{2\times1}=4$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x=4$ ou $x=2$ ou $x=0$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-8x+16$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Donc : l'ensemble de solutions de : $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$ est : $S=\left]0;2\right]$

3) $\dfrac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$

a) Cette inéquation est définie si : $-x^2+8x-17\neq 0$

Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

Donc : $D_I=\mathbb{R}$

b) Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2-9x-3$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=-9$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-9)^2-4\times(-6)\times(-3)=81-72=9>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{9-\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{9-3}{2\times(-6)}=\dfrac{6}{-12}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{9+\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{9+3}{2\times(-6)}=\dfrac{12}{-12}=-1$

Pour déterminer le signe du trinôme : $-x^2+8x-17$

Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=-1<0$ et $\Delta<0$, alors : $-x^2+8x-17<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$		$-$		$-$	
$\dfrac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

4) (E) ; $|x^2-2x+3|=2$

$|x^2-2x+3|=2$ Signifie que : $x^2-2x+3=2$ ou $x^2-2x+3=-2$

• Résolution de $x^2-2x+3=2$

$x^2-2x+3=2$ Signifie que : $x^2-2x+1=0$

Signifie que : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x-1=0$

Signifie que : $x=1$

La seule solution de $x^2-2x+3=2$ est 1.

• Résolution de $x^2-2x+3=-2$.

$x^2-2x+3=-2$ Signifie que : $x^2-2x+5=0$

On calcule son discriminant : $\Delta = -16$.

Ainsi l'équation $x^2-2x+5=0$ n'a aucune solution réelle

5) $(x-2)^2-|x-2|=0$ Signifie que : $|x-2|^2-|x-2|=0$ car $|X|^2=X^2$

Signifie que : $|x-2|(|x-2|-1)=0$

Signifie que : $|x-2|=0$ ou $|x-2|-1=0$

Signifie que : $x-2=0$ ou $|x-2|=1$

Signifie que : $x-2=0$ ou $x-2=1$ ou $x-2=-1$

Signifie que : $x=2$ ou $x=3$ ou $x=1$

Donc : $S=\{1;2;3\}$

Exercice02 : $8pts(0,5pts+1pts+0,5pts+1,5pts+2pts+1pts+1,5pts)$

Soit le polynôme suivant (E) : $P(x)=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}$

1) Montrer que -1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\geq 0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}$

$P(-1)=(-1)^3-\sqrt{5}(-1)^2-(-1)+\sqrt{5}$

$P(-1)=-1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}=0$

Donc : **-1** est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)=x^3-\left(\sqrt{5}+1\right)x^2+\sqrt{5}x+x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$

$$=x^3-\sqrt{5}x^2-x^2+\sqrt{5}x+x^2-\sqrt{5}x-x+\sqrt{5}$$

$$=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}=P(x)$$

3)a) $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$ $\quad a=1$ et $b=-\left(\sqrt{5}+1\right)$ et $c=\sqrt{5}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\left(\sqrt{5}+1\right)\right)^2 - 4\times\sqrt{5}\times 1 = \left(\sqrt{5}+1\right)^2 - 4\sqrt{5}$

$\Delta = \sqrt{5}^2 + 2\times 1\times\sqrt{5} + 1^2 - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = \left(\sqrt{5}-1\right)^2$

3)b) $Q(x) = x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + \sqrt{5}$ et $\Delta = \left(\sqrt{5}-1\right)^2$

Puisque : $\Delta > 0$ donc il y'a deux racines :

$x_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2\times 1} = \dfrac{\sqrt{5}+1+\left|\sqrt{5}-1\right|}{2\times 1}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2\times 1} = \dfrac{\sqrt{5}+1-\left|\sqrt{5}-1\right|}{2\times 1}$

Or on a : $\sqrt{5} \succ 1$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2 \succ (1)^2$ Donc $\sqrt{5}-1 \succ 0$ par suite: $\left|\sqrt{5}-1\right| = \sqrt{5}-1$

Donc : $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{2\times 1} = \sqrt{5}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{2\times 1} = 1$ par suite : $S = \left\{1, \sqrt{5}\right\}$

4) $x - \left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x} + \sqrt{5} = 0$ Est équivalente à: $\sqrt{x}^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x} + \sqrt{5} = 0$

On pose : $X = \sqrt{x}$ et on a donc : $X^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)X + \sqrt{5} = 0$

Mais d'après 3) b) on a : $X_1 = \sqrt{5}$ et $X_2 = 1$ qui Signifie que : $\sqrt{x_1} = \sqrt{5}$ et $\sqrt{x_2} = 1$

Qui Signifie que: $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ et $\left(\sqrt{x_2}\right)^2 = 1^2$

Qui Signifie que: $x_1 = 5$ et $x_2 = 1$ par suite: $S = \{1, 5\}$

5) On a: $P(x) = (x+1)\left(x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + \sqrt{5}\right)$

$P(x) = 0$ Signifie $x+1 = 0$ ou $x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + \sqrt{5} = 0$

Signifie $x_0 = -1$ ou $x_1 = \sqrt{5}$ ou $x_2 = 1$ Par suite: $S = \left\{-1, 1, \sqrt{5}\right\}$

6) $P(x) \geq 0$ est équivalente à: $(x+1)\left(x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + \sqrt{5}\right) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = [-1;1] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right[$

Exercice03 : $4,5pts(1,5pts + 1,5pts + 1,5pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes : $\sqrt{x-1} = 2$ et $\dfrac{1}{2y+1} = -1$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases} 3\sqrt{x-1} - \dfrac{5}{2y+1} - 11 = 0 \\ -2\sqrt{x-1} + \dfrac{1}{2y+1} + 5 = 0 \end{cases}$

Solution : **1)** soit $x \geq 1$: a) $\sqrt{x-1}=2$ équivalent : $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=2^2$ équivalent : $x-1=4$

Équivalent : $x=5$

Donc : $S=\{5\}$

a) soit $y \neq -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2y+1}=-1$ équivalent : $2y+1=-1$ équivalent : $2y=-2$ Équivalent : $y=-1$

Donc : $S=\{-1\}$

2) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x-5y=11 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} 6x-10y=22 & (\times 2) \\ -6x+3y=-15 & (\times 3) \end{cases}$

Donc : la somme des équations donne : $6x-10y-6x+3y=22-15$

Équivalent : $-7y=7$ Équivalent : $y=-1$

On a : $-2x+y=-5$ donc : $-2x-1=-5$ Équivalent : $x=2$

La solution du système est donc : $S=\{(2,-1)\}$

3) Déduction des questions précédents des solutions du système : $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-\frac{5}{2y+1}-11=0 \\ -2\sqrt{x-1}+\frac{1}{2y+1}+5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-\frac{5}{2y+1}-11=0 \\ -2\sqrt{x-1}+\frac{1}{2y+1}+5=0 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-5\frac{1}{2y+1}=11 \\ -2\sqrt{x-1}+\frac{1}{2y+1}=-5 \end{cases}$

On pose : $\begin{cases} X=\sqrt{x-1} \\ Y=\frac{1}{2y+1} \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} 3X-5Y=11 \\ -2X+Y=-5 \end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=2$ et $Y=-1$

Donc : $\sqrt{x-1}=2$ et $\frac{1}{2y+1}=-1$ Équivalent : $x=5$ et $y=-1$

Par suite : $S=\{(5,-1)\}$

BONUS : $1,5\,pts$

Exercice04 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I) ; $\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0$

Corrigé : a) L'équation est définie si $x^2+1\geq 0$ toujours vraie

L'équation est donc définie sur : $D_I=\mathbb{R}$

b) $\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0$ Equivaut à : $\sqrt{x^2+1}\leq 2x-1$

Le tableau de signe de l'expression : $2x-1$

x	$-\infty$ $1/2$ $+\infty$
$2x-1$	$-$ 0 $+$

Si : $x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ alors : $2x-1<0$ et l'inéquation n'a pas de solution puisque

$\sqrt{x^2+1}>0$

Donc : $\sqrt{x^2+1} \leq 2x-1$ est vraie pour tout $x \in [1;7[$

Donc : $S_1 = \varnothing$

Si : $x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors : $2x-1 \geq 0$

$\sqrt{x^2+1} \leq 2x-1$ Equivaut à : $\sqrt{x^2+1}^2 \leq (2x-1)^2$ Equivaut à : $x^2+1 \leq 4x^2-4x+1$

Equivaut à : $-3x^2+4x \leq 0$

Equivaut à : $x(-3x+4) \leq 0$

Étudions le signe du trinôme suivant : $x(-3x+4)$

x	$-\infty$		0		$4/3$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$	|	$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x(-3x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$x(-3x+4) \leq 0$ Equivaut à : $x \in]-\infty;0] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Donc : $S_2 = \left(]-\infty;0] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right[\right) \cap \left[\frac{1}{2};+\infty\right[= \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien