Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 : N sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

Exercice01 : $4pts(1pts+1pts+0,5pts+1,5pts+1pts)$

On considère le polynôme : $P(x)=-5x^2+8x-3$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

b) En déduire que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

2) On suppose que : $|x+1|<\frac{1}{5}$

a) Montrer que : $-\frac{6}{5}<x<-\frac{4}{5}$

b) Montrer que : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$

c) En déduire que $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Solution : $P(x)=-5x^2+8x-3$

1) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

$P(x)=0$ Signifie que : $-5x^2+8x-3=0$; $\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times(-5)\times(-3)=4$

Donc : $x_1=\frac{-8-\sqrt{4}}{2\times(-5)}=\frac{-10}{-10}=1$ et $x_2=\frac{-8+\sqrt{4}}{2\times(-5)}=\frac{-6}{-10}=\frac{3}{5}$

Par suite: $S=\left\{3/5;1\right\}$

b) Déduction que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

$P(x)=-5x^2+8x-3$ Admet deux racines : $x_1=1$ et $x_2=\frac{3}{5}$

Donc : $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-5(x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)=(x-1)(-5x+3)=(x-1)(3-5x)$

2) On suppose que : $|x+1|<\frac{1}{5}$

a) Montrons que : $-\frac{6}{5}<x<-\frac{4}{5}$

On a : $|x+1|<\frac{1}{5}$ Signifie que : $-\frac{1}{5}<x+1<\frac{1}{5}$ Signifie que : $-\frac{1}{5}-1<x+1-1<\frac{1}{5}-1$

Signifie que : $-\frac{6}{5}<x<\frac{-4}{5}$

b) Montrons que : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$: on sait que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

On a : $-\frac{6}{5}<x<\frac{-4}{5}$ Signifie que : $\frac{4}{5}<-x<\frac{6}{5}$ Signifie que : $4<-5x<6$ Signifie que : $7<3-5x<9$ ①

On a : $-\frac{6}{5}<x<\frac{-4}{5}$ Signifie que : $-\frac{6}{5}-1<x-1<\frac{-4}{5}-1$ Signifie que : $-\frac{11}{5}<x-1<-\frac{9}{5}$

Signifie que : $\frac{9}{5}<-(x-1)<\frac{11}{5}$ ②

De : ① et ② on déduit que : $\frac{9}{5}\times 7<-(x-1)(3-5x)<\frac{11}{5}\times 9$ c'est-à-dire : $\frac{63}{5}<-P(X)<\frac{99}{5}$

Par suite: $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$

c) Déduction que $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Il suffit de vérifier que : $|P(x)-(-16,2)|<3,6$? c'est-à-dire : $|P(x)+16,2|<3,6$

On a : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$ donc : $-\frac{99}{5}+16,2<P(x)+16,2<-\frac{63}{5}+16,2$

Donc : $-\frac{18}{5}<P(x)+16,2<\frac{18}{5}$

Donc : $-6,3<P(x)+16,2<6,3$

Donc : $-6,3<P(x)+16,2<6,3$

Donc : $|P(x)-(-16,2)|<3,6$

Par suite: $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Exercice02 : $4\,pts(2\,pts\times 2)$

Résoudre l'équation et l'inéquation suivante :

1) $x^4-3x^2-4=0$ 2) $\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$

Solution :1) $x^4-3x^2-4=0$ Signifie que : $(x^2)^2-3x^2-4=0$; On pose : $X=x^2$

Donc l'équation devient : $X^2-3X-4=0$; $\Delta=25>0$

On a : $a=1$; $b=-3$; $c=-4$

$\Delta=b^2-4\times a\times c=(-3)^2-4\times 1\times(-4)=9+16=25>0$

Donc : l'équation a deux solutions : $X_1=\frac{-(-3)+5}{2\times 1}=\frac{8}{2}=4$ et $X_2=\frac{-(-3)-5}{2\times 1}=\frac{-2}{2}=-1$

Donc l'équation a deux solutions : $X_1=4$ et $X_2=-1$

Donc : $x^2=4$ et $x^2=-1$ (impossible)

Donc : $x=2$ ou $x=-2$ Donc : $S=\{-2;2\}$

2) $\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$: a) Cette inéquation est définie si : $-x^2+8x-17\neq 0$

Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

Donc : $D_I=\mathbb{R}$

b) Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2-9x-3$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=-9$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-9)^2-4\times(-6)\times(-3)=81-72=9>0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{9-\sqrt{9}}{2a} = \frac{9-3}{2\times(-6)} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{9+\sqrt{9}}{2a} = \frac{9+3}{2\times(-6)} = \frac{12}{-12} = -1$

Pour déterminer le signe du trinôme : $-x^2+8x-17$

Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = 8^2 - 4\times(-1)\times(-17) = 64-68 = -4 < 0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=-1<0$ et $\Delta<0$, alors : $-x^2+8x-17<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice03 : $5,5\,pts(1\,pts+1\,pts+2\,pts+1,5\,pts)$

Soit le polynôme : $P(x)=2x^3-x^2-13x-6$

1)Quels sont les diviseurs entiers relatifs du terme constant 6 ?

2) Déterminer (en cas d'existence) les racines relatives du polynôme $P(x)$

3) Factoriser le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\geq 0$

Solution :1) les diviseurs entiers relatifs du terme constant 6 sont : -6 ; -3 ; -2 ; -1 ;1 ;2 ;3 ;6

2) S'il existe une racine $a\in\mathbb{Z}$ du polynôme $P(x)$ alors : $P(a)=0$

C'est-à-dire : $2a^3-a^2-13a-6=0$

C'est-à-dire : $a\left(2a^2-a-13\right)=6$

C'est-à-dire : a est un diviseur de 6

C'est-à-dire : $a\in\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$

Maintenant il ne nous reste plus qu'à tester chacun de ces nombres s'il est racine :

On trouve seulement : $\begin{cases} P(-2)=2(-2)^3-(-2)^2-13(-2)-6=0 \\ P(3)=2\times3^3-3^2-13\times3-6=0 \end{cases}$

Donc : les racines relatives du polynôme $P(x)$ sont : -2 et 3

3) Factorisons le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

On a :-2 est racine du polynôme $P(x)$ donc $P(x)$ est divisible par $x+2$

Il existe donc un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x+2)Q(x)$

Mais aussi on a : 3 est racine du polynôme $P(x)$ c'est-à-dire : $P(3)=(3+2)Q(3)=0$

C'est-à-dire : $Q(3)=0$

C'est-à-dire : 3 est racine du polynôme $Q(x)$

C'est-à-dire : $Q(x)$ est divisible par $x-3$

C'est-à-dire : Il existe un polynôme $R(x)$ tel que : $Q(x)=(x-3)R(x)$

Donc : $P(x)=(x+2)(x-3)R(x)$

C'est-à-dire : $P(x)$ est divisible par $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$

Donc : $P(x)=(x^2-x-6)R(x)$

Mais le $\deg P=3$ et $\deg(x^2-x-6)=2$ par suite : $\deg R=1$

Donc : $R(x)=ax+b$

$P(x)=(x^2-x-6)(ax+b)=ax^3+bx^2-ax^2-bx-6ax-6b$

$P(x)=ax^3+(b-a)x^2-(b+6a)x-6b$ et puisque : $P(x)=2x^3-x^2-13x-6$

Par identification on a : $\begin{cases} a=2 \\ b-a=-1 \\ -6b=-6 \\ -(b+6a)=-13 \end{cases}$ signifie que $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Donc : $\boxed{P(x)=(x+2)(x-3)(2x+1)}$

4) $P(x)\geq 0$ Signifie: $(x+2)(x-3)(2x+1)\geq 0$

Donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2		$-1/2$		3		$+\infty$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left[-2;\frac{1}{2}\right]\cup[3;+\infty[$

Exercice04 : $3,5\,pts(1,5\,pts+2\,pts)$

On considère l'équation : (E_m) $x^2-2x+(2m-1)=0$

1) Déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'équation (E_m) admette deux solutions distinctes α et β

2) Déterminer la valeur du paramètre m pour que : $(\alpha-1)\times(\beta-1)=-10$

Solution : 1) C'est une équation du second degré : $\Delta_m=b^2-4ac=4-4(2m-1)=4-8m+4=8-8m$

L'équation admet deux solutions distinctes α et β si et seulement si : $\Delta_m\succ 0$

Signifie que : $8-8m\succ 0$ c'est-à-dire : $m\prec 1$

2) Déterminons la valeur du paramètre m pour que : $(\alpha-1)\times(\beta-1)=-10$

$(\alpha-1)\times(\beta-1)=-10$ Signifie que : $\alpha\beta-\alpha-\beta+1=-10$

Signifie que : $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-10$

Signifie que : $\alpha\beta=2m-1$ et $\alpha+\beta=2$

Donc : $2m-1-2+1=-10$ signifie que : $2m=-8$ c'est-à-dire : $m=-4$

Exercice05 : $(3\,pts)$

Combien mesure la longueur d'un rectangle de périmètre 56 cm et d'aire 192 cm² ?

Solution : Posons l="la longueur du rectangle" et L="la largeur du rectangle"

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 2l+2L=56 \\ l\times L=192 \end{cases}$

Isolons L dans la première équation : On a : $2l+2L=56$ donc $2L=56-2l$ c'est-à-dire : $L=\dfrac{56-2l}{2}$

Donc : $L=28-l$

Remplaçons maintenant cette valeur de L dans la deuxième équation.

$l\times L=192$ Donc : $l\times(28-l)=192$

Donc : $28l-l^2=192$ Donc : $-l^2+28l-192=0$: on obtient une équation du deuxième degré.

Calculons delta : $\Delta=28^2-4\times(-1)\times(-192)=784-768=16$

L'équation admet donc deux solutions :

$l_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-28-\sqrt{16}}{-2}=\dfrac{-28-4}{-2}=\dfrac{-32}{-2}=16$ et $l_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-28+\sqrt{16}}{-2}=\dfrac{-28+4}{-2}=\dfrac{-24}{-2}=12$

Les deux valeurs possibles pour la longueur sont 16 et 12.

Le produit de ces deux nombres vaut 192

Donc 16 et 12 correspondent bien à la longueur et à la largeur du rectangle.

La longueur de ce rectangle mesure donc 16 centimètres.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien