Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 :O sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

Exercice01 : $7,5pts(0,5pts+1pts+1pts+1,5pts+1pts+0,5pts+1pts)$

Soit : $P(x)=2x^3+9x^2+7x-6$

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+3$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+3$ montrer que : $P(x)=(x+3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+3x-2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en un produit de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\succ 0$

Solution :1) $P(x)=2x^3+9x^2+7x-6$

On a $P(-3)=2\times(-3)^3+9(-3)^2+7\times(-3)-6=-54+81-21-6=0$ donc -3 est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x+3$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+9x^2+7x-6 & x+3 \\ \hline -2x^3-6x^2 & 2x^2+3x-2 \\ \hline 3x^2+7x-6 & \\ -3x^2-9x & \\ \hline -2x-6 & \\ 2x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2) Donc : $P(x)=(x+3)Q(x)$ avec : $Q(x)=2x^2+3x-2$

3) $Q(x)=2x^2+3x-2$ et $Q(x)=0$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2x (-2) = 9+16 = 25$

Donc : $x_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{-8}{4}=-2$ et $x_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Par suite: $S=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$

4) $Q(x)<0$ les racines de $Q(x)$ sont : $x_1=-2$ et $x_2=\frac{1}{2}$

Donc le tableau de Signe est:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-2;\frac{1}{2}\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x+3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+3x-2$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=-2$ et $x_2=\frac{1}{2}$.

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(2x-1)(x+2)$

Par suite une factorisation de $P(x)$ est : $P(x)=(x+3)(2x-1)(x+2)$.

6) On a : $P(x)=(x+3)(2x-1)(x+2)$

$P(x)=0$ Signifie ; $(x+3)(2x-1)(x+2)=0$

Signifie : $x+2=0$ ou $2x-1=0$ ou $x+3=0$

Signifie : $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-3$ par suite : $S=\left\{-3,-2,\frac{1}{2}\right\}$

7) $P(x)<0$ Signifie: $(x+3)Q(x)<0$

x	$-\infty$	-3		-2		$1/2$	$+\infty$
$Q(x)$	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc: $S=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-2;\frac{1}{2}\right[$

Exercice02 : $6pts(1,5pts\times4)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-5x^2+6x+8\geq 0$ b) $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0$ c) $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}<0$ d) $\frac{2x^2-12x+19}{x-2}\leq 0$

Solution :a) $-5x^2+6x+8\geq 0$

Calculons le discriminant de l'équation $-5x^2+6x+8=0$: $a=-5$; $b=6$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=6^2-4\times 8\times(-5)=36+160=196=14^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6-14}{-10}=2$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6+14}{-10}=-\frac{4}{5}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$	$-4/5$		2	$+\infty$
$-5x^2+6x+8$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc : $S=\left[-\frac{4}{5};2\right]$

b) $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0$ Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$:

$a=2$; $b=-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $c=\sqrt{6}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times 2\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $\Delta=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$		+	0	−	0	+	

Donc : $S=\left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$

c) $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}<0$

Calculons le discriminant de l'équation $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$: $a=16$; $b=-\frac{8}{3}$; $c=\frac{1}{9}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\frac{8}{3}\right)^2-4\times16\times\frac{1}{9}=\frac{64}{9}-\frac{64}{9}=0$

Comme $\Delta=0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{8}{3}}{2\times16}=\frac{1}{12}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{12}$		$+\infty$
$16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$		+	0	+	

Donc : $S=\varnothing$

d) $\frac{2x^2-12x+19}{x-2}\leq0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $2x^2-12x+19$

Calculons son discriminant : $a=2$; $b=-12$; $c=19$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=12^2-4\times2\times19=144-152=-8<0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=2>0$ et $\Delta<0$, alors : $2x^2-12x+19>0$

Le signe de : $\frac{2x^2-12x+19}{x-2}$ ne dépend donc que de celui de : $x-2$

$x-2=0$ Signifie que : $x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		−	0	+	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=]-\infty;2[$

Exercice03 : $3,5pts(1,5pts+1pts+1pt)$

On considère l'équation : (E_m) $x^2-2x+(2m-1)=0$

1) Déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'équation (E_m) admette deux solutions distinctes α et β

2) Déterminer la valeur du paramètre m pour que :

a) $\alpha \times \beta = -5$ b) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -42$

Solution : 1) C'est une équation du second degré : $\Delta_m = b^2 - 4ac = 4 - 4(2m-1) = 4 - 8m + 4 = 8 - 8m$

L'équation admet deux solutions distinctes α et β si et seulement si : $\Delta_m \succ 0$

Signifie que : $8 - 8m \succ 0$ c'est-à-dire : $m \prec 1$

2)a) Déterminons la valeur du paramètre m pour que : a) $\alpha \times \beta = -5$:

On sait que : $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{2m-1}{1} = 2m-1$

Donc : $2m - 1 = -5$ qui signifie que : $2m = -4$ c'est-à-dire : $m = -2$

b) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -42$ signifie que : $\alpha\beta(\alpha+\beta) = -42$

Or on sait que : $\alpha + \beta = 2$ et et $\alpha \times \beta = 2m - 1$

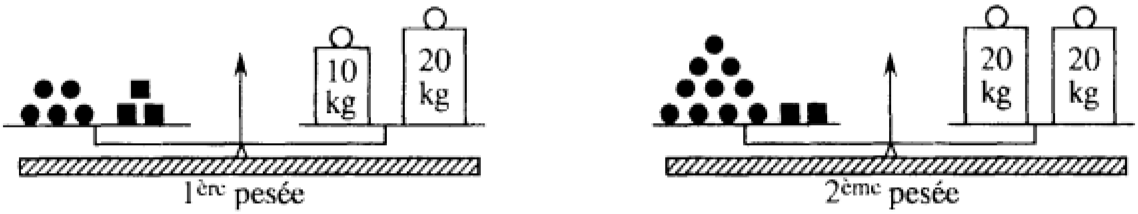
Donc : $2(2m-1) = -42$ équivaut à : $2m - 1 = -21$

Équivaut à : $2m = -20$ c'est-à-dire : $m = -10$

Exercice04 : $3pts(0.5pts + 0.5pts + 2pt)$

On effectue deux pesées (les masses sont exprimées en kg).

La première pesée nous permet d'écrire : 5x + 3y = 30.



1)a) Déterminer l'équation que permet d'écrire la première pesée

b) Déterminer l'équation que permet d'écrire la seconde pesée

2) En déduire la masse d'une boule et la masse d'un cube.

Solution : Soit x la masse d'une boule (●) et y la masse d'un cube (■).

1)a) l'équation que permet d'écrire la première pesée est : $5x + 3y = 10 + 20$ c'est-à-dire :

$5x + 3y = 30$

b) l'équation que permet d'écrire la seconde pesée est : $10x + 2y = 20 + 20$ c'est-à-dire :

$10x + 2y = 40$

$10x + 2y = 40$ Signifie que : $2(5x + y) = 40$ Signifie que : $5x + y = 20$

2) Pour Déterminer la masse d'une boule et la masse d'un cube on va résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivantes : $\begin{cases} 5x + 3y = 30 \\ 5x + y = 20 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + 3y = 30 & (L_1) \\ 5x + y = 20 & (L_2) \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} 2y = 10 & (L_1) - (L_2) \\ 5x + y = 20 & (L_2) \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} y = 5 \\ 5x + 5 = 20 \end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases} y = 5 \\ 5x = 15 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

Donc : la masse d'une boule (●) est 3kg et la masse d'un cube (■) est 5kg

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien