Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°3 :P sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré et Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

Exercice01 : $4,5pts(0,5pts+1pts+1,5pts+1,5pts)$

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) : $x^4-7x^3+16x^2-14x+4=0$

1) a) Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E)

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : (E') : $X^2-7X+12=0$

2) Montrer que si α est solution de l'équation (E) alors : $\alpha+\frac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

3) En déduire les solutions de l'équation (E)

Solution :1) On a : $0^4-7\times0^3+16\times0^2-14\times0+4=4\neq0$

Donc : 0 n'est pas solution de l'équation (E)

2) (E') : $X^2-7X+12=0$

Calculons delta : $\Delta=(-7)^2-4\times1\times12=49-48=1$

L'équation admet donc deux solutions :

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-1}{2}=3$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+1}{2}=4$ Donc : $S=\{1;2\}$

2) Soit α solution de l'équation (E) donc : $\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4=0$ (1)

Donc : $\alpha\neq0$ d'après 1)a)

Montrons que : $\alpha+\frac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

Il suffit de montrer que : $\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)+12=0$?

$$\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)+12=\alpha^2+2\alpha\times\frac{2}{\alpha}+\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\alpha-\frac{14}{\alpha}+12$$

$$=\alpha^2+4+\frac{4}{\alpha^2}-7\alpha-\frac{14}{\alpha}+12=\alpha^2-7\alpha+16+\frac{4}{\alpha^2}-\frac{14}{\alpha}=\frac{\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4}{\alpha^2}$$

Et puisque on a : $\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4=0$ (1) donc : $\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)+12=\frac{0}{\alpha^2}=0$

Par suite : $\alpha+\frac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

3) d'après 1)b) les solutions de l'équation (E) sont les solutions des équations :

$\alpha+\frac{2}{\alpha}=3$ et $\alpha+\frac{2}{\alpha}=4$

- $\alpha+\frac{2}{\alpha}=3$ Signifie : $\frac{\alpha^2+2}{\alpha}=3$

Signifie : $\alpha^2-3\alpha+2=0$

Calculons delta : $\Delta=(-3)^2-4\times2=1$

L'équation admet donc deux solutions : $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ Et $x_2=\frac{3+1}{2}=2$

- $\alpha+\frac{2}{\alpha}=4$ Signifie : $\frac{\alpha^2+2}{\alpha}=4$

Signifie : $\alpha^2-4\alpha+2=0$

Calculons delta : $\Delta=(-4)^2-4\times2=8$

L'équation admet donc deux solutions : $x_1=\frac{4-\sqrt{8}}{2}=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$ Et

$x_2=\frac{4+\sqrt{8}}{2}=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

Donc : $S=\left\{1;2;2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right\}$

Exercice02 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $x(x+2)\geq(2x+1)(x+2)$ 2) $\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$

Corrigé : Méthode : Pour résoudre l'inéquation : $x(x+2)\geq(2x+1)(x+2)$ on transforme tout d'abord l'inéquation pour se ramener à une étude de signes de facteurs du premier degré :

$x(x+2)\geq(2x+1)(x+2)$ Signifie que : $x(x+2)-(2x+1)(x+2)\geq0$

Signifie que : $(x+2)\left[x-(2x+1)\right]\geq0$

Signifie que : $(x+2)(x-2x-1)\geq0$

Signifie que : $(x+2)(-x-1)\geq0$

On peut alors dresser le tableau de signes de l'expression : $(x+2)(-x-1)$

$-x-1=0$ Signifie que : $x=-1$

$x+2=0$ Signifie que : $x=-2$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-1-x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On cherche à résoudre l'inéquation :

$(x+2)(-x-1)\geq0$ Donc : $S=[-2,-1[$

2) $\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$

a) Cette inéquation est définie si : $-x^2+8x-17\neq0$

Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles. Donc : $D_I=\mathbb{R}$

b) Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2-9x-3$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=-9$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-9)^2-4\times(-6)\times(-3)=81-72=9>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{9-\sqrt{9}}{2a}=\frac{9-3}{2\times(-6)}=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{9+\sqrt{9}}{2a}=\frac{9+3}{2\times(-6)}=\frac{12}{-12}=-1$

Pour déterminer le signe du trinôme : $-x^2+8x-17$ Calculons son discriminant :

$a=-1$; $b=8$; $c=-17$ $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=-1<0$ et $\Delta<0$, alors : $-x^2+8x-17<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.
On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice03 : $4,5pts(0,5pts+1,5pts+1pts+1,5pts)$

On considère l´équation : (E) : $x^3-x^2-4x-6=0$

1) Montrer que le nombre 3 est solution de (E)

2) Déterminer trois réels : a, b et c tels que : $x^3-x^2-4x-6=(x-3)(ax^2+bx+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $x^3-x^2-4x-6>0$

Corrigé :1) On remarque que : $3^3-3^2-4\times3-6=27-9-12-6=27-27=0$

Donc : le nombre 3 est solution de (E)

2) Le nombre 3 est solution de (E) donc il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que :

$x^3-x^2-4x-6=(x-3)(ax^2+bx+c)$

Or, $(x-3)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases}a=1\\b-3a=-1\\c-3b=-4\\-3c=-6\end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases}a=1\\b=2\\c=2\end{cases}$

Donc : $x^3-x^2-4x-6=(x-3)(x^2+2x+2)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$x^3-x^2-4x-6=0$ Equivaut à : $(x-3)(x^2+2x+2)=0$

Equivaut à : $x-3=0$ ou $x^2+2x+2=0$ Equivaut à : $x=3$ ou $x^2+2x+2=0$

Le discriminant de : $x^2+2x+2=0$ est : $\Delta=2^2-4\times2=4-8=-4<0$ donc pas solutions

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\{3\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $x^3-x^2-4x-6>0$

On a : $x^3-x^2-4x-6=(x-3)(x^2+2x+2)$

Le discriminant de : $x^2+2x+2=0$ est : $\Delta=-4<0$ et puisque : $a=1>0$ donc : $x^2+2x+2>0$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$x-3$	$-$ 0 $+$

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=]3,+\infty[$

Exercice04 : $5pts(2pts+1,5pts+1,5pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x^4+3x^2+2=0$

2) Déterminer une factorisation de x^4+3x^2+2 en un produit de trinômes.

3)En déduire une résolution de l'inéquation : $x^4+3x^2+2\leq 0$

Corrigé :1) Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.
Je pose donc $X=x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$x^4+3x^2+2=0$ Équivaut à : $(x^2)^2+3x^2+2=0$

Je pose : $X=x^2$ l'équation devienne : $X^2+3X+2=0$

Le discriminant de : $X^2+3X+2=0$ est : $\Delta=3^2-4\times1\times2=9-8=1>0$ et ses solutions sont :

$X_1=\frac{-3-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{-4}{2}=-2$ et $X_2=\frac{-3+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$

C'est-à-dire : $x^2=-2$ impossible ou $x^2=-1$ aussi impossible

Donc l´équation $x^4+3x^2+2=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$:
$S=\varnothing$

2) On a : $X^2+3X+2=1(X+1)(X+2)$

Donc une factorisation de x^4+3x^2+2 en un produit de trinômes est : $x^4+3x^2+2=1(x^2+1)(x^2+2)$

3) Résolution de l'inéquation : $x^4+3x^2+2<0$

On a : $x^4+3x^2+2=1(x^2+1)(x^2+2)$

Et on a : $x^2+1>0$ et $x^2+2>0$ donc $x^4+3x^2+2>0$

Ainsi, l'ensemble solution de $x^4+3x^2+2\leq 0$ est : $S=\varnothing$

Exercice05 : $(3pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}\frac{5}{x-1}+\frac{3}{y-2}=4\\ \frac{-2}{x-1}+\frac{1}{y-2}=1\end{cases}$

Solution : Pour que le système existe il faut que : $x\neq1$ et $y\neq1$ on pose : $X=\frac{1}{x-1}$ et $Y=\frac{1}{y-2}$

Le système devient : $\begin{cases}5X+3Y=4\\ -2X+Y=1\end{cases}$ On résolve ce système et on trouve : $X=\frac{1}{11}$ et $Y=\frac{13}{11}$

Donc : $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{11}$ et: $\frac{1}{y-2}=\frac{13}{11}$ c'est-à-dire : $x-1=11$ et $y-2=\frac{11}{13}$

Donc : $x=12$ et $y=\frac{37}{13}$ par suite : $S=\left\{\left(12,\frac{37}{13}\right)\right\}$

Bonus : Exercice06 : (Equations avec des racines carrées) Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{3x+4}=x$

Corrigé : Remarque : La relation $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $3x+4\geq 0$ Signifie que : $x\geq -\frac{4}{3}$

L'équation est donc définie sur : $D_E=\left[-\frac{4}{3},+\infty\right[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{3x+4}=x$ Signifie que : $\sqrt{3x+4}^2=x^2$ et $x\geq 0$

Signifie que : $3x+4=x^2$ et $x\geq 0$

Signifie que : $-x^2+3x+4=0$ et $x\geq 0$

Le discriminant de : $-x^2+3x+4=0$ est : $\Delta=3^2-4\times4\times(-1)=9+16=25>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=\cancel{-1}$ et $x_2=\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=4\in D_E$ et $x\geq 0$

$-x^2+3x+4=0$ et $x\geq -\frac{4}{3}$ et $x\geq 0$ Signifie que : $x=4\in D_E$

Par conséquent : $S=\{4\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien