Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 : A sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $2pts(1pts+1pts)$ 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes : a) $x_1=-6\pi$ b) $x_2=\frac{31\pi}{3}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(x_1)$; $B(x_2)$

Solution : 1) a) $x_1=-6\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a $x_1=-6\pi$

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x_1=2k\pi$ c a d $\alpha=-6\pi+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<-6\pi+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi+6\pi<2k\pi\leq\pi+6\pi$

Équivalent à : $5\pi<2k\pi\leq7\pi$

Équivalent à : $5<2k\leq7$

Équivalent à : $\frac{5}{2}<k\leq\frac{7}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=3$ et donc $\alpha=-6\pi+2\times3\pi=-6\pi+6\pi=0$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x_1=-6\pi$ est $\alpha=0$

b) $x_2=\frac{31\pi}{3}$

Methode1 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x_2

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x_2=2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha=\frac{31\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<\frac{31\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi-\frac{31\pi}{3}<2k\pi\leq\pi-\frac{31\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{34\pi}{3}<2k\pi\leq-\frac{28\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{34}{3}<2k\leq-\frac{28}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\frac{17}{3}<k\leq-\frac{14}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $-5,6<k\leq-4,6$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-5$ et donc : $\alpha=\frac{31\pi}{3}+2k\pi=\frac{31\pi}{3}+2(-5)\pi=\frac{31\pi}{3}-10\pi=\frac{31\pi-30\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x_2=\frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha=\frac{\pi}{3}$

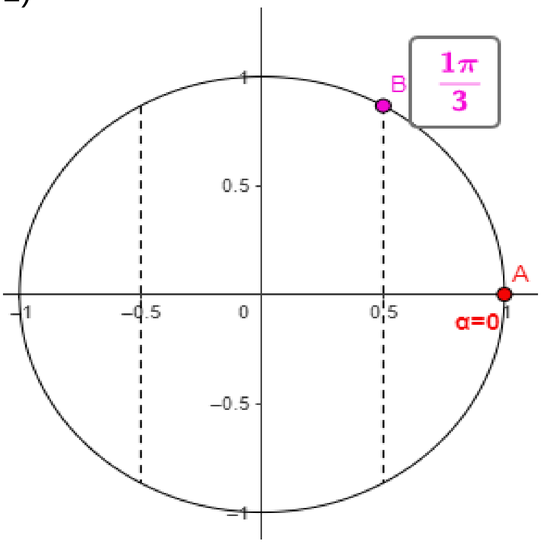
Methode2 : $x_2=\frac{31\pi}{3}\notin]-\pi;\pi]$

On divise 31 par 3 on trouve $\simeq10,3$ on prend le nombre entier proche ex : 10 et $10\times3=30$

On a $\frac{31\pi}{3}=\frac{30\pi+\pi}{3}=\frac{30\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+10\pi=\frac{\pi}{3}+5\times2\pi$ et $\frac{\pi}{3}\in]-\pi;\pi]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_2 = \frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha = \frac{\pi}{3}$

2)



Exercice02: $3pts(1pts + 1pts + 1pts)$

Sachant que : $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

1) Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

2) Calculer la valeur de : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

3) En déduire la valeur exacte de : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Solution :1) On a : $1 + \tan^2\frac{\pi}{10} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{10}}$ donc : $\cos^2\frac{\pi}{10} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{1+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

C'est-à-dire : $\cos^2\frac{\pi}{10} = \frac{1}{\frac{5+5-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{10-2\sqrt{5}}$

Donc : $\cos^2\frac{\pi}{10} = \frac{5\left(10+2\sqrt{5}\right)}{100-20} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et puisque : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \geq 0$ alors : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

2) Calculons la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$:

On a : $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$ donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)}{5}}$ c'est-à-dire : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

3) On a : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi-\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi}{10}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$ car : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

Donc : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

On a aussi : $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}$ par suite : $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Exercice03 : $2,5pts(1pts+1,5pts)$

Simplifier les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

$E=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$

$F=2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\cos^4 x+\sin^4 x)$

Solution : $E=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$

$E=4\cos^2 x+4\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-4\cos x\sin x+4\sin^2 x$

$E=5\cos^2 x+5\sin^2 x=5(\cos^2 x+\sin^2 x)=5\times1=5$ $F=2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\cos^4 x+\sin^4 x)$

$F=2\left((\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3\right)-3(\cos^4 x+\sin^4 x)$

$F=2(\sin^2 x+\cos^2 x)(\cos^4 x+\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x)-3(\cos^4 x+\sin^4 x)$

$F=2\cos^4 x+2\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x-3\cos^4 x-3\sin^4 x$

$F=-\cos^4 x-\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

$F=-(\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x)$

Exercice04 : $5pts(2pts+1pts+1pts+1pts)$ Soit $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ On pose :

$A(x)=\frac{1}{2}\left[(\cos(2x)+\sin(2x))^2-1\right]$

1) Calculer $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

2) Montrer que : $A(x)=\cos 2x\times\sin 2x$

3) Montrer que : $A(-x)=-A(x)$

4) Calculer : $A(x)+A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Solution : 1) On a : $A(x)=\frac{1}{2}\left[(\cos(2x)+\sin(2x))^2-1\right]$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-1\right]$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)^2-1\right]$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[(0+1)^2-1\right]=\frac{1}{2}\times0=0$

$$A\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)+\sin\left(2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)\right)^2-1\right]$$

$$A\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1\right]$$

Donc : $A\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2}$

2) Montrons que : $A(x)=\cos 2x\times\sin 2x$

On a : $A(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right)^2-1\right]$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos(2x)\right)^2+2\cos(2x)\sin(2x)+\left(\sin(2x)\right)^2-1\right]$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos(2x)\right)^2+\left(\sin(2x)\right)^2+2\cos(2x)\sin(2x)-1\right]$ or : $(\cos X)^2+(\sin X)^2=1$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\left[1+2\cos(2x)\sin(2x)-1\right]$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}2\cos(2x)\sin(2x)=\cos(2x)\sin(2x)$

3) Montrons que : $A(-x)=-A(x)$

On a : $A(x)=\cos(2x)\sin(2x)$

Donc : $A(-x)=\cos(-2x)\times\sin(-2x)$ or : $\cos(-X)=\cos X$ et $\sin(-X)=-\sin X$

Donc : $A(-x)=-\cos(2x)\times\sin(2x)$

Donc : $A(-x)=-A(x)$

4) Calculons : $A(x)+A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$: On a : $A(x)=\cos(2x)\sin(2x)$

Donc : $A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc : $A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ or : $\cos\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin X$ et $\sin\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=\cos X$

Donc : $A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin(2x)\cos(2x)$

Donc : $A(x)+A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(2x)\sin(2x)-\sin(2x)\cos(2x)=0$

Exercice05 : $3pts(1pts+1,5pts+0,5pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $2\cos x+\sqrt{3}=0$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $2\cos x+\sqrt{3}=0$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $2\sin x+4=0$

Solution :1) $2\cos x+\sqrt{3}=0$ Équivaut à : $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Donc : $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation : $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < \frac{5}{6} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{5}{6} < 2k \leq 1 - \frac{5}{6}$

Donc : $-\frac{11}{6} < 2k \leq \frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{11}{12} < k \leq \frac{1}{12}$

Donc $-0,9... \leq k \leq 0,08...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{5\pi}{6}$

b) Encadrement de $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < -\frac{5}{6} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 + \frac{5}{6} < 2k \leq 1 + \frac{5}{6}$

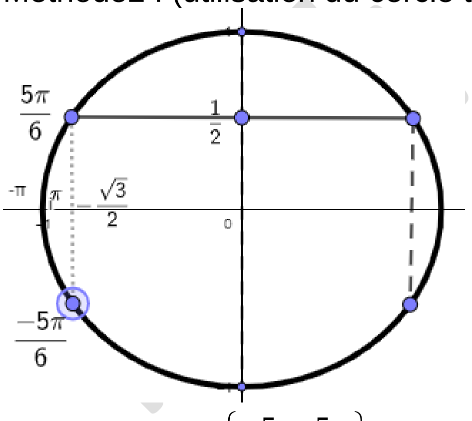
Donc : $-\frac{1}{6} < 2k \leq \frac{11}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{12} < k \leq \frac{11}{12}$

Donc $-0,... \leq k \leq 0,...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{5\pi}{6}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$

3) $2\sin x + 4 = 0$ Équivaut à : $\sin x = -\frac{4}{2} = -2 \notin [-1;1]$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$

Exercice06 : $3pts(1pts + 1pts + 1pts)$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$

b) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $[0;2\pi]$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

Solution :1) a) On pose $t=\sin x$ et l'équation $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ devient : $2t^2-9t-5=0$
On cherche les racines du trinôme $2t^2-9t-5$:
Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1=\frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $t_2=\frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2}=5$

Donc $\sin x=-\frac{1}{2}$ et $\sin x=5$

Or on sait que $-1\leq\sin x\leq 1$ donc l'équation : $\sin x=5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) Encadrement de : $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$:

$0\leq-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$ Équivaut à : $\frac{1}{12}\leq k\leq\frac{13}{12}$ c'est-à-dire : $0,08\leq k\leq 1,02$ et $k\in\mathbb{Z}$

Par suite : $k=1$: pour $k=1$ on remplace on trouve $x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$ Donc $0\leq\frac{7}{6}+2k\leq 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$

Donc $-0,5\leq k\leq 0,41$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=\frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]}=\left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

Règles : Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient dans chaque cas une seule famille de solutions.

$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
$\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

2) $\sin x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\sin x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ Équivaut à : $\sin x=0$ ou $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

Équivaut à : $x=k\pi \quad ou \quad 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = k\pi \quad ou \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = k\pi \quad ou \quad 2x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = k\pi \quad ou \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ k\pi ; \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice07 : $(1,5\,pts)$

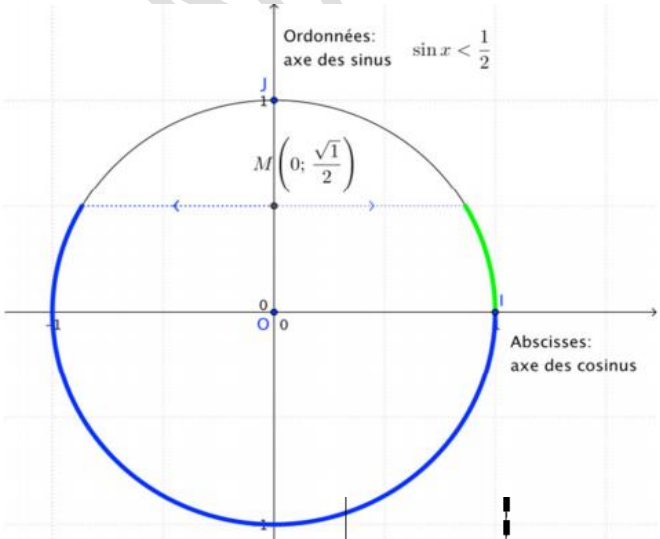
Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $2\sin x - 1 < 0$

Solution : $2\sin x - 1 < 0$ Équivaut à : $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$



En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{1}{2}$ dans $[0\,;2\pi]$

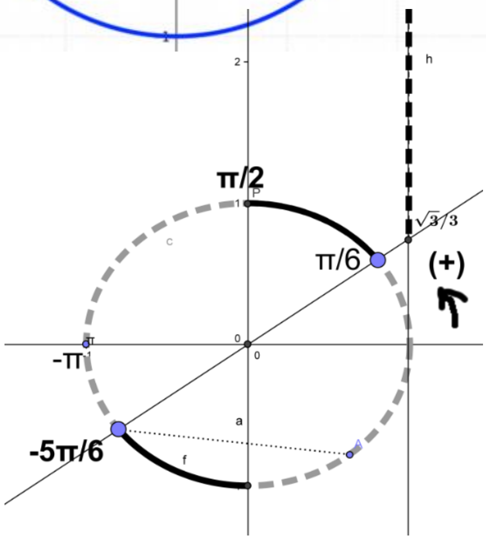
On trouve que :

$\sin x < \frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left]0;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6};2\pi\right[$

Donc : $S = \left]0;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6};2\pi\right[$

$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [-\pi\,;\pi]$ alors : $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$



En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\tan x$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dans $[-\pi\,;\pi]$

On trouve que : $\tan x \succ \frac{\sqrt{3}}{3}$

Équivaut à : $x \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

Donc : $S = \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien