Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 : B sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $2\,pts(1\,pts+1\,pts)$

1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :

a) $x_1 = -2023\pi$ b) c) $x_2 = \dfrac{-23\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(x_1)$; $B(x_2)$

Solution :1) a) $x_1 = -2023\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a $x_1 = -6\pi$

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x_1 = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = -2023\pi + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi\,;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < -2023\pi + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi + 2023\pi < 2k\pi \leq \pi + 2023\pi$

Équivalent à : $2022\pi < 2k\pi \leq 2024\pi$

Équivalent à : $2022 < 2k \leq 2024$

Équivalent à : $1011 < k \leq 1012$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = 1012$ et donc $\alpha = -2023\pi + 2\times 1012\pi = -2023\pi + 2024\pi = \pi$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x_1 = -2023\pi$ est $\alpha = \pi$

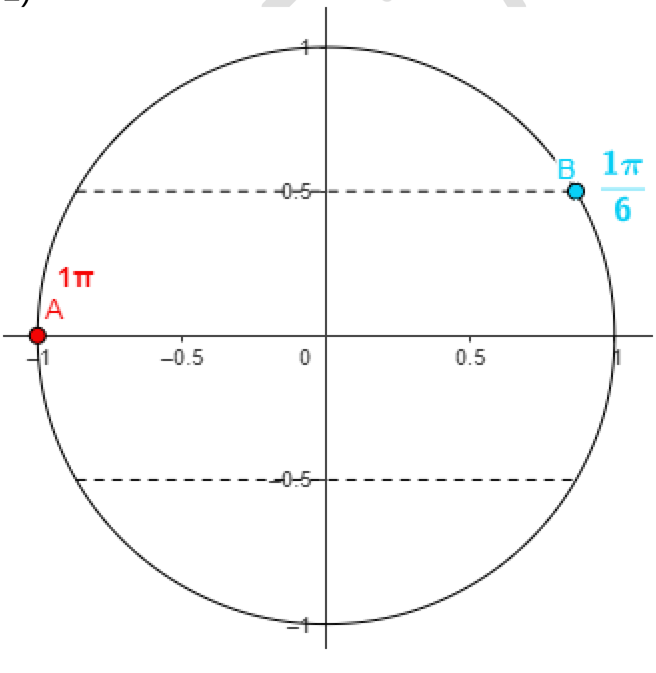
b) $x_2 = \dfrac{-23\pi}{6} \notin]-\pi\,;\pi]$

On divise 23 par 6 on trouve $\simeq 3{,}8$ on prend le nombre entier proche ex : 4 et $6\times 4 = 24$

On a $\dfrac{-23\pi}{6} = \dfrac{-24\pi+\pi}{6} = \dfrac{-24\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} - 4\pi = \dfrac{\pi}{6} + (-2)\times 2\pi$ et $\dfrac{\pi}{6} \in]-\pi\,;\pi]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_2 = \dfrac{-23\pi}{6}$ est : $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

2)



Exercice02 : $(1pts)$ $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ et $\vec{k}$ des vecteurs tel que :

$\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\left(\overline{\vec{w};\vec{v}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$; $\left(\overline{\vec{k};\vec{w}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer les mesures de l'angle orienté suivant : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)$

Solution : $\left(\overline{\vec{u};\vec{k}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)+\left(\overline{\vec{v};\vec{w}}\right)+\left(\overline{\vec{w};\vec{k}}\right)[2\pi]$(Relation de Chasles)

Donc : $\left(\overline{\vec{u};\vec{k}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}-\left(\overline{\vec{w};\vec{v}}\right)-\left(\overline{\vec{k};\vec{w}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\vec{u};\vec{k}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\vec{u};\vec{k}}\right)\equiv\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

Exercice03 : $2pts(1pts+1pts)$

1) Sachant que : $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer la valeur de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$

2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Solution : 1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $\cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)=1-\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)$

Donc : $\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=1-\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$ C'est-à-dire : $\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

Donc : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$ ou $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=-\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$

De plus on a : $\frac{9\pi}{5}\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ donc : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\prec 0$

Par suite : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2) $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{10\pi-\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{10\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

De même on a : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{10\pi-\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{10\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et donc : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice04 : $5pts(1,5pts+1,5pts+1pts+1pts)$

Soit l'expression suivante : $A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

1) Montrer que : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

2) Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

3)a) Calculer en fonction de $\sin x$ le nombre : $A=\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\cos\left(4\pi-x\right)}{\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}$.

b) En déduire la valeur de A si $\tan x=3$

Solution :1) $A(x)=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(2\pi+\pi+x)+\sin\left(x-4\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos x-\cos x+\cos x$

Donc : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

2) Calcul de $A\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$: on a : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

Donc : $A\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$A\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$A\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc : $A\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

Calcul de $A\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)$: $A\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)$

$A\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\dfrac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(\dfrac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(3\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(3\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$A\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(2\pi+\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\pi+\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$A\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

3)a) Calculons en fonction de : $\sin x$ le nombre : $A=\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\cos\left(4\pi-x\right)}{\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}$

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(-x)}{\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}}=\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(-x)}{\dfrac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

Donc : $A=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{-\cos x}=-\sin^2 x$

b) Déduction de la valeur de A si $\tan x=3$

On sait que : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ et $\cos^2 x\tan^2 x=\sin^2 x$

Donc : $\sin^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}\tan^2 x$ et puisque : $\tan x = 3$ alors :

$A = -\sin^2 x = -\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = -\frac{9}{1+9} = -\frac{9}{10}$

Exercice05 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$

1)Simplifier les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$

$A = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

$B = \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x$

2) Ecrire seulement en fonction de $\tan x$ l'expression suivante : $C = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$

Solution :1) $A = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

$A = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x$

$A = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2\times 1 = 2$ $B = \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x$

$B = \cos^4 x - \cos^2 x - \sin^4 x + \sin^2 x$

$B = \cos^2 x(\cos^2 x - 1) - \sin^2 x(\sin^2 x - 1)$ On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$ et $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$

$B = \cos^2 x \times (-\sin^2 x) - \sin^2 x(-\cos^2 x)$

$B = -\cos^2 x \times \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x = 0$

2) $C = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$ On a : $\sin x = \tan x \times \cos x$

Donc : $C = \frac{\tan^3 x \times \cos^3 x - \cos^3 x}{\tan x \times \cos x + \cos x}$

Donc : $C = \frac{\cos^3 x(\tan^3 x - 1)}{\cos x(\tan x + 1)}$

Donc : $C = \cos^2 x \frac{\tan^3 x - 1}{\tan x + 1}$ or on a : $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $C = \frac{1}{\tan^2 x + 1}\frac{\tan^3 x - 1}{\tan x + 1} = \frac{\tan^3 x - 1}{(\tan^2 x + 1)(\tan x + 1)}$

Exercice06 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $4\tan x + 4 = 0$

2) Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ l'équation suivante : $2\cos 2x + \sqrt{3} = 0$

3) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ l'équation suivante : $2\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

Solution :1) on a $4\tan x + 4 = 0$ est définie dans $\mathbb{R}$ équivaut à : $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

$4\tan x + 4 = 0$ Équivaut à : $\tan x = -1$

Équivaut à : $\tan x = -\tan\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) $2\cos 2x+\sqrt{3}=0$ Equivaut à : $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Équivaut à : $\cos 2x=-\cos\frac{\pi}{6}$ c'est-à-dire : $\cos 2x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

• Encadrement de : $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$: $-\pi\le\frac{5\pi}{12}+k\pi<\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Equivaut à : $-1\le\frac{5}{12}+k<1$ cad $-1-\frac{5}{12}\le k<1-\frac{5}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{17}{12}\le k<\frac{7}{12}$

Par suite : $k=0$ ou $k=-1$

Si $k=0$ alors : $x=\frac{5\pi}{12}+0\pi=\frac{5\pi}{12}$

Si $k=-1$ alors : $x=\frac{5\pi}{12}-1\pi=\frac{-7\pi}{12}$

• Encadrement de : $x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$: $-\pi\le-\frac{5\pi}{12}+k\pi<\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Equivaut à : $-1\le\frac{-5}{12}+k<1$ cad $-\frac{7}{12}\le k<\frac{17}{12}$

Par suite : $k=0$ ou $k=1$

Si $k=0$ alors : $x=-\frac{5\pi}{12}+0\pi=-\frac{5\pi}{12}$

Si $k=1$ alors : $x=-\frac{5\pi}{12}+1\pi=\frac{7\pi}{12}$

Finalement : $S=\left\{-\frac{7\pi}{12};-\frac{5\pi}{12};\frac{5\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right\}$

3) $2\sqrt{2}\sin x+2=0$ Équivaut à : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire : $\sin x=-\sin\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

L'équation a pour solutions $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\frac{5\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{4}+2k\le\frac{5}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\le 2k\le\frac{5}{2}+\frac{1}{4}$

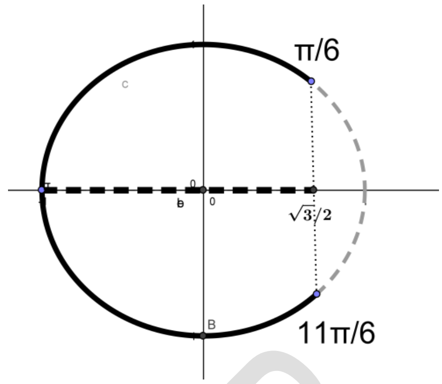
Donc $-\frac{1}{8}\le k\le\frac{11}{8}$ c'est-à-dire : $-0{,}12\le k\le 1{,}37$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve : $x_1=-\frac{\pi}{4}+2\times 0\pi=-\frac{\pi}{4}$

Pour $k=1$ on trouve : $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\times 1\pi=\frac{7\pi}{4}$

• Encadrement de ; $\frac{5\pi}{4}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}\leq\frac{5\pi}{4}+2k\pi\leq\frac{5\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$



Donc : $-\frac{1}{2}\leq\frac{5}{4}+2k\leq\frac{5}{2}$ Donc $-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\leq 2k\leq\frac{5}{2}-\frac{5}{4}$

Donc : $-\frac{7}{8}\leq k\leq\frac{5}{8}$ Donc $-0,8\leq k\leq 0,6$ et $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $k=0$

Pour $k=0$ on trouve : $x_3=\frac{5\pi}{4}+2\times 0\pi=\frac{5\pi}{4}$ Donc

$S=\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

Exercice07 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $2\cos x-\sqrt{3}<0$

Solution : $2\cos x-\sqrt{3}<0$ Équivaut à : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[0;2\pi]$ alors : $x=\frac{11\pi}{6}$ et $x=\frac{\pi}{6}$

(En utilisant les encadrements)

$\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x<\cos\frac{\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0;2\pi]$

On trouve que : $S=\left]\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right[$

Exercice08 : $2,5\,pts(1,5\,pts+1\,pts)$ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) :

$2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+3=0$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $[0\,;\pi]$

Solution :1) On pose $t=\cos x$ et l'équation (E) devient : $2t^2-3\sqrt{3}t+3=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3\sqrt{3}t+3$:

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=\left(-3\sqrt{3}\right)^2-4\times2\times3=27-24=3$

Les racines sont : $t_1=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $t_2=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{4\sqrt{3}}{2\times2}=\sqrt{3}$

Donc : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x=\sqrt{3}$

• Pour : $\cos x=\sqrt{3}$

On sait que : $-1\leq\cos x\leq1$ donc l'équation $\cos x=\sqrt{3}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

• Pour : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ /k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k

a) Pour : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Prenons par exemple la valeur $k=-1$ et remplaçons on obtient : $x=\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}$; cette valeur n'appartient pas à $[0\,;\pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -1 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=0$: on obtient $x=\frac{\pi}{6}$; cette valeur appartient à $[0\,;\pi]$.

Pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi\notin[0\,;\pi]$

Il est inutile de poursuivre pour des valeurs supérieures à : 1

Donc : la seule valeur dans $[0\,;\pi]$ est : $x=\frac{\pi}{6}$

b) Pour : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

La même démarche que précédemment

Pas de valeurs dans $[0\,;\pi]$

Conclusion : $S_{[0\,;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien