Correction : Devoir surveillé n°4 :C sur les leçons suivantes :

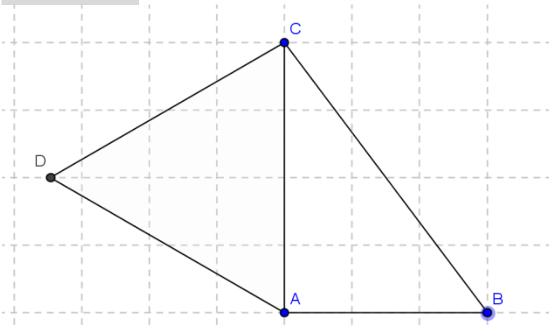
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $2,5pts(0,5pts+2pts)$ ABC est un triangle rectangle en A direct, tel que $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et ACD est un triangle équilatéral direct.

1) Faire une figure.

2) Déterminer la mesure principale des angles suivant : $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)$; $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$

Solution :



$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$\equiv-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\pi+\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

Dans le triangle ABC on a : $ABC+BAC+ACB=\pi$ donc : $ACB=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

Donc, vue l'orientation : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice02 : $2,5pts(1,5pts+1pts)$ On a : $\sin x=-\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a **:** $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$

Donc $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$ c'est à dire **:** $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x=\frac{3}{5}$ ou $\cos x=-\frac{3}{5}$

Or on a $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x\geq 0$ et par suite : $\cos x=\frac{3}{5}$

On a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3}$.

Exercice03 : $5pts(1,5pts+1,5pts+1pts+1pts)$

1) Montrer que : $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=(\cos x+1)(2\cos x-1)$ si $x\in\mathbb{R}$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation suivante : $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=0\quad(E)$

3) Placer sur le cercle trigonométrique munie d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ les solutions de l'équation (E).

4) Soient A ; B ; C les points trouvés dans la question 3)
Montrer que : ABC est un triangle équilatéral

Solution : 1) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=2(\cos x)^2-\cos(x+10\pi+\pi)-1$

$=2(\cos x)^2-\cos(x+\pi)-1=2(\cos x)^2+\cos x-1$

Et on a $(\cos x+1)(2\cos x-1)=2(\cos x)^2+\cos x-1$

Donc : $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=(\cos x+1)(2\cos x-1)$ si $x\in\mathbb{R}$

2) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=0$ Équivaut à : $(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

Équivaut à : $\cos x+1=0$ ou $2\cos x-1=0$ c'est-à-dire : $\cos x=-1$ ou $\cos x=\frac{1}{2}$

Équivaut à : $\cos x=-1$ ou $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x=(2k+1)\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

- Encadrement de $(2k+1)\pi$: $-\pi<(2k+1)\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<2k+1\leq 1$ c'est-à-dire : $-2<2k\leq 0$ équivaut à : $-1<k\leq 0$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ et on trouve $x_1=\pi$

- Encadrement de $\frac{\pi}{3}+2k\pi$: $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $-1<\frac{1}{3}+2k\leq 1$

Donc $\frac{-4}{3}<2k\leq\frac{2}{3}$ cad $\frac{-2}{3}<k\leq\frac{1}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ et on trouve $x_2=\frac{\pi}{3}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$: $-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

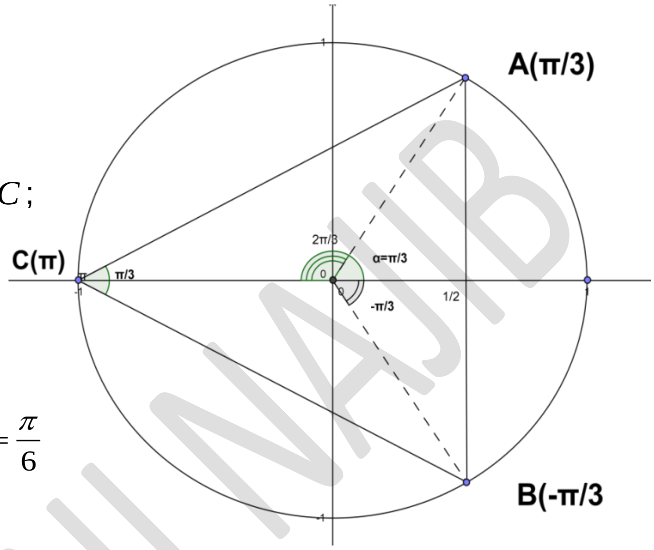
PROF: ATMANI NAJIB

Donc $-1 < -\frac{1}{3} + 2k \leq 1$ équivaut à : $\frac{-2}{3} < 2k \leq \frac{4}{3}$

C'est-à-dire : $\frac{-1}{3} < k \leq \frac{2}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ et on trouve $x_3 = -\frac{\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left\{\pi; \frac{\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}\right\}$



3) Voir figure.

4) Montrons que : ABC est un triangle équilatéral :

On a : $OA = OB = OC$ donc les triangles : OAB ; OAC ; OBC sont des triangles isocèles de sommet O

Exemple dans le triangle OAB on a : $AOB = \frac{2\pi}{3}$

Donc : $OAB = OBA = \frac{\pi}{6}$

De même on déduit que : $OBC = OCB = OAC = OCA = \frac{\pi}{6}$

Équivaut à $ABC = BAC = ACB = \frac{\pi}{3}$

Par suite : ABC est un triangle équilatéral

Exercice04 : $(2\,pts)$ Résoudre dans $[0, 2\pi]$ de l'équation : $\cos 3x = -\cos\frac{\pi}{7}$

Solution : $\cos 3x = -\cos\frac{\pi}{7}$ Équivaut à : $\cos 3x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$

Équivaut à : $\cos 3x = \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

Équivaut à : $3x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi$ ou $3x = -\frac{6\pi}{7} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3}$

a) Encadrement de : $x = \frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3}$: $0 \leq \frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi$

Donc : $0 \leq \frac{2}{7} + \frac{2k}{3} \leq 2$ c'est-à-dire : $0 - \frac{2}{7} < \frac{2k}{3} \leq 2 - \frac{2}{7}$

Donc : $-\frac{2}{7} < \frac{2k}{3} \leq \frac{12}{7}$ c'est-à-dire : $-\frac{6}{7} < 2k \leq \frac{36}{7}$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{7} < k \leq \frac{18}{7}$

Donc $-0,4... \leq k \leq 2,5...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$ on remplace on trouve :Si $k = 0$ alors : $x = \frac{2\pi}{7}$

Si $k = 1$ alors : $x = \frac{2\pi}{7} + \frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{21}$

Si $k = 2$ alors : $x = \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{3} = \frac{34\pi}{21}$

b) Encadrement de : $x = -\frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3}$: $0 \leq -\frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi$

Donc : $0 \leq -\frac{2}{7} + \frac{2k}{3} \leq 2$ c'est-à-dire : $0 + \frac{2}{7} < \frac{2k}{3} \leq 2 + \frac{2}{7}$

Donc : $\frac{2}{7} < \frac{2k}{3} \leq \frac{16}{7}$ c'est-à-dire : $\frac{6}{7} < 2k \leq \frac{48}{7}$ c'est-à-dire : $\frac{3}{7} < k \leq \frac{24}{7}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc $0,4... \leq k \leq 3,4...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=1$ ou $k=2$ ou $k=3$on remplace on trouve :Si $k=1$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{21}$

Si $k=2$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{3}=\frac{22\pi}{21}$

Si $k=3$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{3}=\frac{36\pi}{21}=\frac{12\pi}{7}$

Donc $S_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{2\pi}{7};\frac{20\pi}{21};\frac{22\pi}{21};\frac{34\pi}{21};\frac{12\pi}{7}\right\}$

Exercice05 : $6\,pts(2\,pts+2\,pts+2\,pts)$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $2\sin^2 x-9\sin x-5=0$ et en déduire les solutions dans $[0;2\pi]$

b) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$

2) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation suivante : $(2\cos x-1)(\tan x+1)\geq 0$

Solution :1) a) On pose $t=\sin x$ et l'équation $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ devient : $2t^2-9t-5\leq 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-9t-5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1=\frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $t_2=\frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2}=5$ Donc $\sin x=-\frac{1}{2}$ et $\sin x=5$

Or on sait que $-1\leq \sin x\leq 1$ donc l'équation $\sin x=5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ donc : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

• Encadrement de ; $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq -\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0\leq -\frac{1}{6}+2k\leq 2$ équivaut à : $\frac{1}{12}\leq k\leq \frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0,08\leq k\leq 1,02$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k=1$

Pour $k=1$ on remplace on trouve $x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq \frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0\leq \frac{7}{6}+2k\leq 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12}\leq k\leq \frac{5}{12}$

Donc $-0,5\leq k\leq 0,41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve $x_2=\frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]}=\left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ ssi $2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-5)\leq 0$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$ c'est-à-dire : $\sin x - 5 < 0$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$

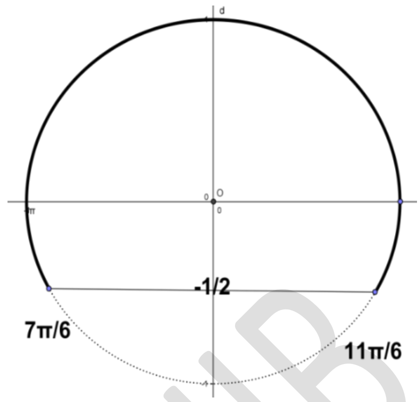
Équivaut à : $\sin x + \frac{1}{2} \geq 0$

Équivaut à : $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'arc en trait plein correspond à tous les points $M(x)$

Tel que : x vérifie $\sin x \geq -\frac{1}{2}$

Donc $S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$

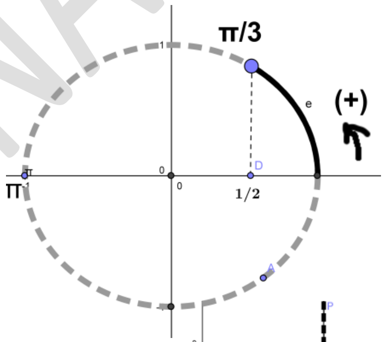


2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ est définie dans $[0\,;\pi]$ si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Donc : $D = [0\,;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

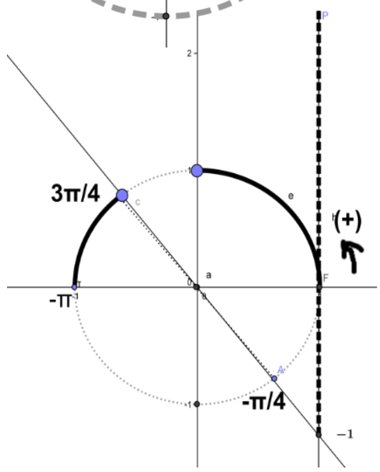
$2\cos x - 1 \geq 0$ Équivaut à : $\cos x \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \geq \cos\frac{\pi}{3}$

$\tan x + 1 \geq 0$ Équivaut à : $\tan x \geq -1$ si et seulement si : $\tan x \geq \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$



x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$\tan x + 1$		$+$	|	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$produit$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc : $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$



Exercice06 : $(2\,pts)$

Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\sin 2x \leq -\frac{1}{2}$

Solution : 1iér étape : On pose : $X = 2x$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ Équivaut à : $-\pi \leq 2x \leq \pi$

Équivaut à : $-\pi \leq X \leq \pi$

$\sin X = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin X = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $X = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $X = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

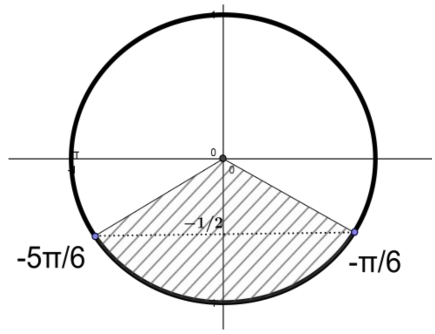
Équivaut à : $X = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $X = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $X \in]-\pi; \pi]$ alors : $X = -\frac{\pi}{6}$ ou $X = -\frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $]-\pi; \pi]$:

PROF: ATMANI NAJIB

$\begin{cases} \sin X \leq -\frac{1}{2} \\ -\pi \leq X \leq \pi \end{cases}$ Équivaut à : $X \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$



2iér étape : Or : $X = 2x$

$X \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$ Équivaut à : $-\frac{5\pi}{6} \leq 2x \leq -\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $-\frac{5\pi}{12} \leq x \leq -\frac{\pi}{12}$ Donc : $S = \left[-\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB