Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 :D sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $2\,pts(1pts+1pts)$

1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :

a) -2024π b) $\dfrac{2019\pi}{4}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :

$A\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$; $B\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$; $C\left(-2024\pi\right)$; $D\left(\dfrac{2019\pi}{4}\right)$; $E\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Solution : 1) a) $-2024\pi=0+2\left(-1012\right)\pi$ et $0\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a -2024π est $\alpha=0$

b) $x=\dfrac{2019\pi}{4}$ *Méthode1 :* Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha=\dfrac{2019\pi}{4}+2k\pi$ et $\alpha\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi<\dfrac{2019\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi-\dfrac{2019\pi}{4}<2k\pi\leq\pi-\dfrac{2019\pi}{4}$

Équivalent à : $-\dfrac{2023\pi}{4}<2k\pi\leq-\dfrac{2015\pi}{4}$

Équivalent à : $-\dfrac{2023}{4}<2k\leq-\dfrac{2015}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\dfrac{2023}{8}<k\leq-\dfrac{2015}{8}$

$-252{,}8<k\leq-251{,}875$ et $k\in\mathbb{Z}$

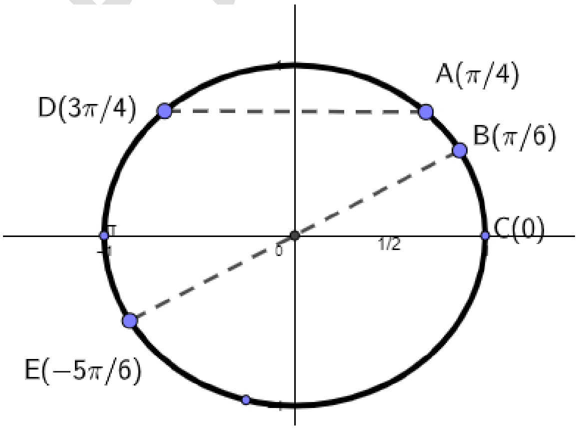
Alors $k=-252$ et donc $\alpha=\dfrac{2019\pi}{4}+2k\pi=\dfrac{2019\pi}{4}+2\left(-252\right)\pi=\dfrac{2019\pi-2016\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\dfrac{2019\pi}{4}$ est $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

Méthode2 : On a $x=\dfrac{2019\pi}{4}=\dfrac{2016\pi+3\pi}{4}=336\pi+\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+168\times2\pi$ et $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc :l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\dfrac{2019\pi}{4}$ est $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :



Exercice02 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ On donne : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

1)Calculer la valeur exacte de : $\sin\frac{\pi}{12}$

2) A l'aide du cercle trigonométrique, en déduire: $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Solution : 1) On a **:** $\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}=1$

Donc **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\cos^2\frac{\pi}{12}$ c'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{8+2\sqrt{12}}{16}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{8+4\sqrt{3}}{16}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{12}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ or $\frac{\pi}{12}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\sin\frac{\pi}{12}>0$

La seule solution possible est : $\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

2) On a : $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$

Donc : $\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

On a : $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Exercice03 : $2pts(1pts+1pts)$

Démontrer que pour tout réel x, on a :

1) $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$

2) $(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=4\cos x\sin x$

Solution :1) $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=$

$\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$

$(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2\times1=2$

2) $(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos x\sin x-\sin^2 x$

$=4\cos x\sin x$

Exercice04 : $6,5pts(1,5pts+2pts+1,5pts+1,5pts)$

1) Simplifier l'expression suivante : $A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

2) Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

3)a) Calculer en fonction de $\sin x$ le nombre : $A=\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$.

b) En déduire la valeur de A si $\tan x=3$

Solution :1) $A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(2\pi+\pi+x)+\sin\left(x-4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos x-\cos x+\cos x=\cos^2 x-\cos x$

2) Calcul de $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$: on a : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Calcul de $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$: $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(-\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

$=\cos^2\left(\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos^2\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

3)a) Calcul en fonction de $\sin x$ le nombre : $A=\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(-x)}{\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}}=\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

$$A=\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

Donc : $A=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{-\cos x}=-\sin^2 x$

b) Déduction de la valeur de A si $\tan x=3$

On sait que : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ et $\cos^2 x\tan^2 x=\sin^2 x$

Donc : $\sin^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}\tan^2 x$

Et puisque : $\tan x=3$ alors :

$A=-\sin^2 x=-\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=-\dfrac{9}{1+9}=-\dfrac{9}{10}$.

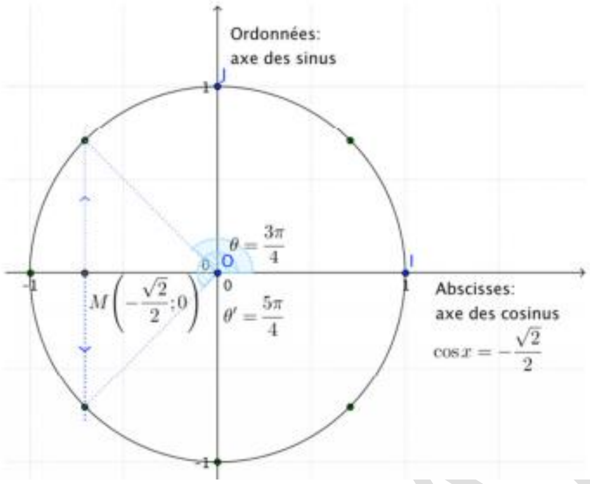
Exercice05 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$

1)Résoudre dans $[0,2\pi]$l'équation suivante : $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1=0$

Solution :1) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

On utilise le cercle trigonométrique :



Donc $S_{[0,2\pi]}=\left\{\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right\}$

2) $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1=0$ Équivaut à : $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

Équivaut à : $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

Équivaut à :

Équivaut à : $2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad 2x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad 2x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad ou \quad 2x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad ou \quad x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{7\pi}{12}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice06 : $(1,5pts)$ Résoudre l'équation dans l'intervalle [0,4π] l'équation : $-\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$

Solution : On isole l'expression trigonométrique.

$-2\sin x-\sqrt{2}=0$ Équivaut à : $-2\sin x=\sqrt{2}$ c'est-à-dire : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $\sin x=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (on utilise le tableau)

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (on peut aussi utiliser le cercle trigonométrique)

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ Ainsi : $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

On s'intéresse maintenant aux solutions situées dans l'intervalle [0,4π]
Pour obtenir toutes les solutions demandées, on remplace k par 0 et par 1:

Donc L'ensemble des solutions de l'équation dans [0,4π] est donc $S=\left\{\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{13\pi}{4};\frac{15\pi}{4}\right\}$

(On peut aussi faire des encadrements pour trouver toutes les solutions demandées

Exercice07 : $(2\,pts)$ Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$

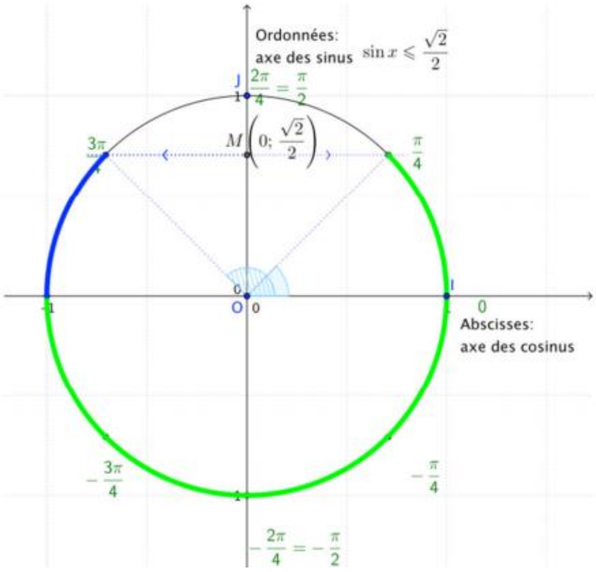
Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in]-\pi;\pi]$ alors : $x=\frac{\pi}{4}$ ou $x=\frac{3\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

Donc : $S=\left]-\pi;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien