Tronc commun Sciences BIOF

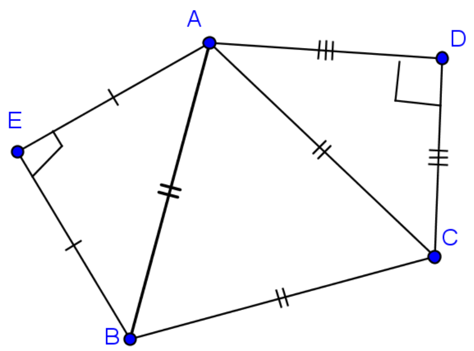
Correction : Devoir surveillé n°4 : E sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $2,5\,pts(0,5\,pts\times 5)$

D'après la figure suivante donner la mesure principale des angles orientés suivant :

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$;$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right)$; $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$; $\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EA}\right)$



Solution : Le triangle : ACD est rectangle et isocèle en D et Le triangle : ABC est équilatérale

- La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est $\frac{\pi}{3}$

Et on écrit : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

- La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$ est $-\frac{\pi}{2}$

Et on écrit : $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

- On a : $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)$

Donc : La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$ est : $-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ cad $-\frac{7\pi}{12}$

- Le triangle : AEB est rectangle et isocèle en E

Donc : $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$

Ssi $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$ est $\frac{5\pi}{6}$

- On a : $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right)$

Donc : La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right)$ est : $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ cad $\frac{7\pi}{12}$

Exercice02 : $2\,pts(1\,pts+1\,pts)$

Calculer en fonction de : $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

$$A(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(3\pi-x)+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$C(x)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-2\sin(\pi-x)+4\sin(\pi+x)$$

Solution :1) $A(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(3\pi-x)+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos x+\cos(2\pi+\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$A(x)=\cos x+\cos(\pi-x)-\cos x$

$A(x)=\cos x-\cos x-\cos x$

$A(x)=-\cos x$

$B(x)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-2\sin(\pi-x)+4\sin(\pi+x)$

$B(x)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)-2\sin(x)-4\sin x$

$B(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-6\sin(x)=\sin x-6\sin x=-5\sin x$

Exercice03 : $(1,5\,pts)$ Simplifier l'expression suivante :

$A=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)-2\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

Solution :1) $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

On remarque que : $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$

Donc : $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$

Exercice04 : $2\,pts(1,5\,pts+0,5\,pts)$ On a : $\tan(x)=\frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Calculer : 1) $\cos x$ 2) $\sin x$

Solution : 1) on a : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$ donc $1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ c'est-à-dire : $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $10\cos^2 x=9$ c'est-à-dire : $\cos^2 x=\frac{9}{10}$

Donc $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ et $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a $\frac{\pi}{2}<x<\pi$: donc $\cos x\leq 0$ et par suite : $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) On a $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$: donc $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $\sin x=-\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

Exercice05 : $2pts(1pts+1pts)$ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \le \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{\pi}{4} < 2k\pi \le \pi - \frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{5\pi}{4} < 2k\pi \le \frac{3\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{4} \le 2k \le \frac{3}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{8} \le k \le \frac{3}{8}$

C'est-à-dire : $-0,6... \le k \le 0,37...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\times 0 \times \pi = \frac{\pi}{4}$

b) Encadrement de $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le \pi$

Donc : $-1 < \frac{3}{4} + 2k \le 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{3}{4} < 2k \le 1 - \frac{3}{4}$

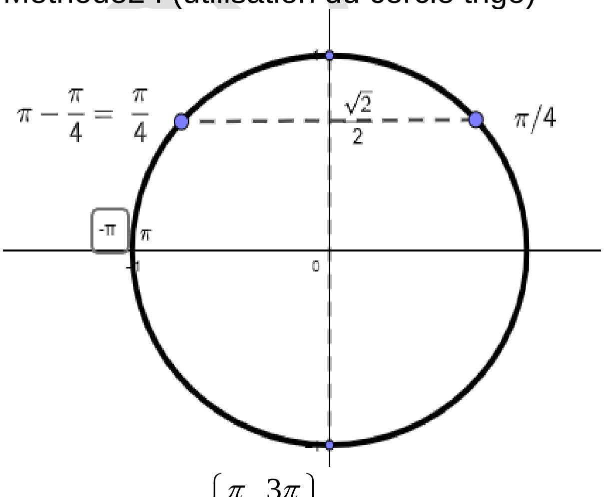
Donc : $-\frac{7}{4} < 2k \le \frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{8} < k \le \frac{1}{8}$

Donc $-0,8... \le k \le 0,12...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\times 0 \times \pi = \frac{3\pi}{4}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

Exercice06 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation suivante : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Solution :1) On a : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ est définie dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ avec ; $k \in \mathbb{Z}$

On sait que : t $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ signifie que : $\tan x = \tan\frac{\pi}{6}$ si et seulement si : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Signifie que : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k

Prenons par exemple la valeur $k = -2$ et remplaçons on obtient : $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$; cette valeur n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k = -1$: on obtient $x = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$; cette valeur appartient à $]-\pi,\pi]$.

En appliquant cette démarche de manière systématique :

pour $k = -1$: $x_1 = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$ convient car appartient à $]-\pi,\pi]$

pour $k = 0$: $x_2 = \frac{\pi}{6}$ convient car appartient à $]-\pi,\pi]$

pour $k = 1$: $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$

Il est inutile de poursuivre (car si pour $k = 1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Donc : les seules valeurs dans $]-\pi\,;\pi]$ sont : $x_1 = -\frac{5\pi}{6}$ et $x_2 = \frac{\pi}{6}$

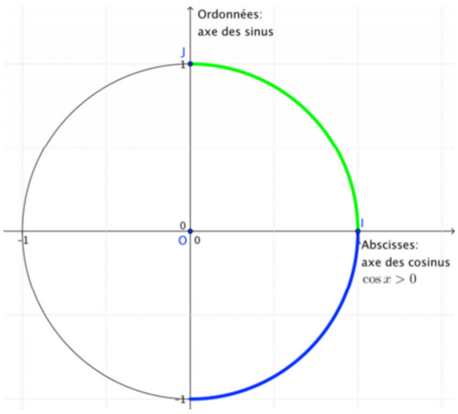
Par suite : $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice07: $(1,5pts)$ Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x > 0$

Solution : $\cos x = 0$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et 0 dans $[0;2\pi]$



Donc : $S = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

Exercice08 : $2\,pts(1,5\,pts+1,5\,pts)$ Simplifier les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$

$D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

Solution :

$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$

$C=\left(\sin^2 x\right)^2-\left(\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x$

$C=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+2\cos^2 x$

$C=\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x$

$C=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=2\sin^4 x+4\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x$

$D=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=2\times 1=2$

Exercice09 : $(3,5\,pts)$ Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : (I) :

$(2\sin x-1)\left(\sqrt{3}\tan x+1\right)>0$

Solution : L'inéquation (I) existe si et seulement si : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Mais dans : $[0;2\pi]$: $x\neq\frac{\pi}{2}$ et $x\neq\frac{3\pi}{2}$

Donc : $D_I=[0;2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$

Résolvons dans $[0;2\pi]$ les équations : $2\sin x-1=0$ et $\sqrt{3}\tan x+1=0$

- $2\sin x-1=0$ Équivaut à : $2\sin x=1$ Équivaut à : $\sin x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

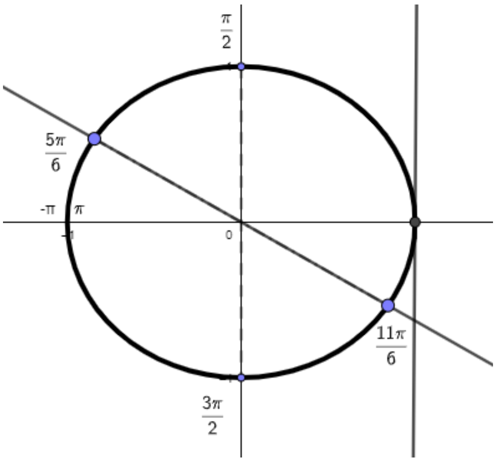
Mais dans : $[0;2\pi]$: $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$

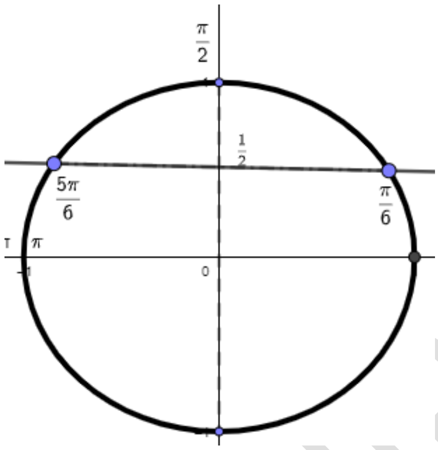
- $\sqrt{3}\tan x+1=0$ Équivaut à : $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\tan\frac{\pi}{6}=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$

Mais dans : $[0;2\pi]$: $x=\frac{11\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$

On va étudier le signe des expressions : $P_1(x)=2\sin x-1$ et $P_2(x)=\sqrt{3}\tan x+1$





On en déduit le tableau de signe de l'expression : $P(x)=(2\sin x-1)\left(\sqrt{3}\tan x+1\right)$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$2\sin x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$\sqrt{3}\tan x+1$		$+$	|	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien