Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 : F sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $(1,5\,pts)$ Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I les points d'abscisses curvilignes x qui vérifie : $2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution : $2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ signifie que : $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$

Pour placer facilement ces points M_k sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)$

$\frac{\pi}{8}+k\pi\in\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ Équivalent à : $-\pi<\frac{\pi}{8}+k\pi\leq\pi$

Équivalent à : $-1<\frac{1}{8}+k\leq 1$

Équivalent à : $-1-\frac{1}{8}<k\leq 1-\frac{1}{8}$

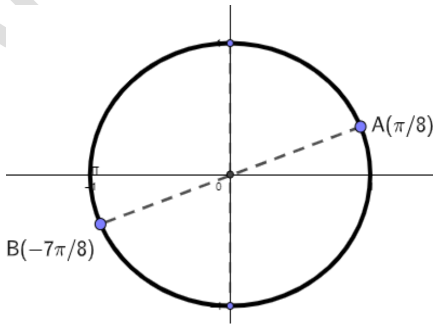
Équivalent à : $-\frac{9}{8}<k\leq\frac{7}{8}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Par suite : $k=-1$ ou $k=0$

Donc : il y a deux ponts :

Si $k=0$ alors : $A\left(\frac{\pi}{8}+0\times\pi\right)$ c'est-à-dire : $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Si $k=-1$ alors : $B\left(\frac{\pi}{8}-1\times\pi\right)$ c'est-à-dire : $B\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$



Exercice02 : $5,5\,pts(2\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts)$

Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et sachant que : $\tan x=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

1) Calculer : $\cos x$ et $\sin x$

2) Calculer : $A=\sin(5\pi-x)+\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-\tan(3\pi-x)$ et $B=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

Solution : 1) On a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ par suite : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{5}{4}}=\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}$

Par suite : $\cos x=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{2}{3}$

Or $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc : $\cos x>0$ donc : $\boxed{\cos x=\frac{2}{3}}$

On a : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ donc : $\sin x = \cos x \tan x$

Donc : $\boxed{\sin x = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

2) Calculons : $A = \sin(5\pi - x) + \cos\left(x + \dfrac{5\pi}{2}\right) - \tan(3\pi - x)$

$$A = \sin(5\pi - x) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \tan(3\pi - x) = \sin(4\pi + \pi - x) + \cos\left(x + \frac{4\pi + \pi}{2}\right) - \tan(-x)$$

Car $\tan(k\pi + X) = \tan X$

$A = \sin(4\pi + \pi - x) + \cos\left(x + 2\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) + \tan x$ Car $\tan(-X) = -\tan X$

$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \tan x$ Car $\cos(2k\pi + X) = \cos X$ et $\sin(2k\pi + X) = \sin X$

$A = \sin x - \sin x + \tan x$ car : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

Donc : $A = \tan x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$B = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$ On a $\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{2\pi}{10} + \dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{5\pi}{10} = \dfrac{\pi}{2}$ donc : $\dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5}$

$B = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 1$

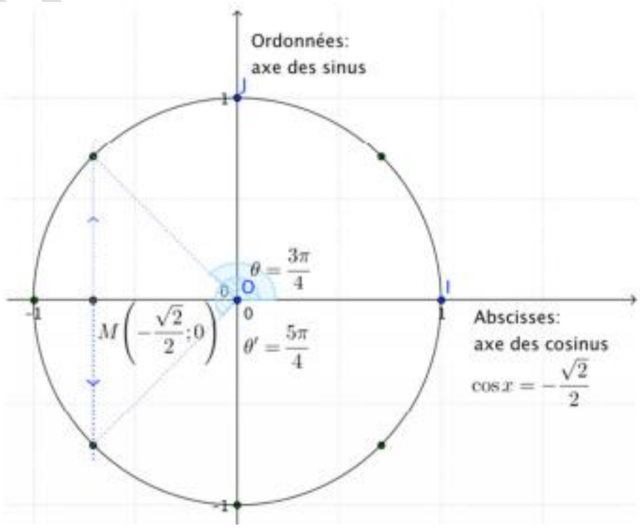
Exercice03 : $(1,5\,pts)$; Résoudre dans $[0, 2\pi]$

l'équation suivantes : $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à :

$\cos x = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

On utilise le cercle trigonométrique :



Donc $S_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

Exercice04 : $4,5\,pts(1,5\,pts + 1,5\,pts + 1,5\,pts)$

Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1) $\cos 2x = \cos\left(\dfrac{8\pi}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[\pi ; 5\pi]$

2) $\sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi ; 2\pi]$

3) $\cos 3x = -\cos x$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi ; \pi]$

Solution : 1) On a : $\cos 2x = \cos\left(\dfrac{8\pi}{2}\right)$ Équivaut à : $\cos 2x = \cos(4\pi)$

Équivaut à : $\cos 2x=\cos(0)$ Équivaut à : $2x=0+2k\pi$ Équivaut à : $x=k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

Pour la résolution dans : $[\pi ; 5\pi]$ on va encadrer :

Encadrement de $k\pi$: $\pi\le k\pi\le 5\pi$ Équivaut à : $1\le k\le 5$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{1;2;3;4;5\}$ par suite : $x_1=\pi$; $x_2=2\pi$; $x_3=3\pi$; $x_4=4\pi$; $x_5=5\pi$

Donc : $S_{[\pi;5\pi]}=\{\pi;2\pi;3\pi;4\pi;5\pi\}$

2) on a : $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ Équivaut à : $x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{5}+2k\pi$ ou $x-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{5}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{13\pi}{15}+2k\pi$ ou $x=\frac{22\pi}{15}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{13\pi}{15}+2k\pi;\frac{22\pi}{15}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Pour la résolution dans : $[-2\pi ; 2\pi]$ on va encadrer :

- Encadrement de $\frac{13\pi}{15}+2k\pi$:

$-2\pi\le\frac{13\pi}{15}+2k\pi\le 2\pi$ Équivaut à : $\frac{-43\pi}{15}\le 2k\pi\le\frac{17\pi}{15}$ $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $\frac{-43}{30}\le k\le\frac{17}{30}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{-1;0\}$ ce qui donne : $x_1=-\frac{17\pi}{15}$; $x_2=\frac{13\pi}{15}$

- Encadrement de $\frac{22\pi}{15}+2k\pi$:

$-2\pi\le\frac{22\pi}{15}+2k\pi\le 2\pi$ Équivaut à : $\frac{-52}{30}\le k\le\frac{8}{30}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{-1;0\}$ ce qui donne : $x_3=-\frac{8\pi}{15}$; $x_4=\frac{22\pi}{15}$

Finalement : $S_{[-2\pi;2\pi]}=\left\{-\frac{17\pi}{15};\frac{13\pi}{15};\frac{-8\pi}{15};\frac{22\pi}{15}\right\}$

3) on a : $\cos 3x=-\cos x$ Équivaut à : $\cos 3x=\cos(\pi-x)$

Équivaut à : $3x=\pi-x+2k\pi$ ou $3x=-(\pi-x)+2k\pi$

Équivaut à : $4x=\pi+2k\pi$ ou $2x=-\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};-\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Pour la résolution dans : $[-2\pi ; \pi]$ on va encadrer :

- Encadrement de : $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$:

$-2\pi\le\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\le\pi$ Équivaut à : $\frac{-9\pi}{4}\le\frac{k\pi}{2}\le\frac{3\pi}{4}$ $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $\frac{-9}{2}\le k\le\frac{3}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$ ce qui donne :

$x_1 = -\frac{7\pi}{4}$; $x_2 = \frac{-5\pi}{4}$; $x_3 = \frac{-3\pi}{4}$; $x_4 = \frac{-\pi}{4}$; $x_5 = \frac{\pi}{4}$; $x_6 = \frac{3\pi}{4}$

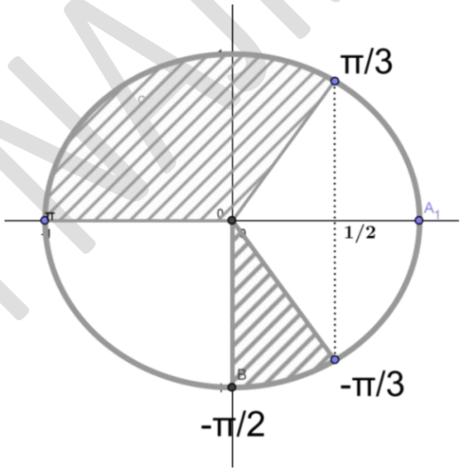
• Encadrement de $-\frac{\pi}{2} + k\pi$:

$-2\pi \le -\frac{\pi}{2} + k\pi \le \pi$ Équivaut à : $-\frac{3\pi}{2} \le k\pi \le \frac{3\pi}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{-3}{2} \le k \le \frac{3}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k \in \{-1; 0; 1\}$ ce qui donne : $x_7 = -\frac{3\pi}{2}$; $x_8 = -\frac{\pi}{2}$; $x_9 = \frac{\pi}{2}$

Finalement : $S_{[-2\pi\,;\,\pi]} = \left\{-\frac{7\pi}{4}; \frac{-5\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4}; \frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{-3\pi}{2}; \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$

Exercice05 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ l'inéquation suivante : $\cos x \le \frac{1}{2}$



Solution : $\cos x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ alors : $x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

$\cos x \le \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \le \cos\frac{\pi}{3}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{1}{2}$

Dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ On trouve que : $S = \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

Exercice06 : $(3,5\,pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$\sqrt{3}\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - 1 = 0$ (E_1)

Solution : $\sqrt{3}\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - 1 = 0$ (E_1)

On utilise un changement de variable : on pose $t = \tan x$

L'équation (E_2) devienne : $\sqrt{3}\,t^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)t - 1 = 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 3t + 1$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta = \left(-\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 - 4 \times \sqrt{3} \times (-1) = 4 + 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2$

Les racines sont : $t_1 = \frac{-\sqrt{3} + 1 + \left|\sqrt{3} + 1\right|}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et

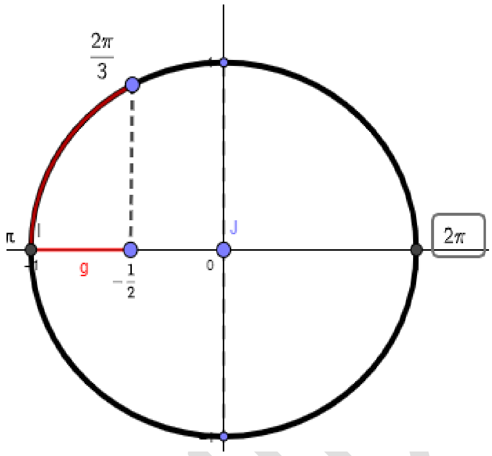
$t_2 = \frac{\sqrt{3} - 1 - \left|\sqrt{3} + 1\right|}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1$ donc : $\tan x = -1$ et $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice07 : $(2\,pts)$ Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : (I) : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\leq -\frac{1}{2}$



Solution : Soit : $x\in[0\,;2\pi]$ donc : $\frac{x}{2}\in[0\,;\pi]$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right)\leq -\frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{2\pi}{3}\leq \frac{x}{2}\leq \pi$

Signifie que : $\frac{4\pi}{3}\leq x\leq 2\pi$

Donc : $S=\left[\frac{4\pi}{3};2\pi\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.