Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 : G sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $2pts(1pts+1pts)$ 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes : a) $x_1=-\frac{2025\pi}{2}$ b) $x_2=\frac{127\pi}{4}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(x_1)$; $B(x_2)$; $C\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $D\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

Solution : 1) a) $x_1=-\frac{2025\pi}{2}=\frac{-2024\pi-\pi}{2}=\frac{-2024\pi}{2}+\frac{-\pi}{2}=-1012\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2(-56)\pi$

et $-\frac{\pi}{2}\in]-\pi;\pi]$ Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_1=-\frac{2025\pi}{2}$ est : $-\frac{\pi}{2}$

b) $x_2=\frac{127\pi}{4}\notin]-\pi;\pi]$

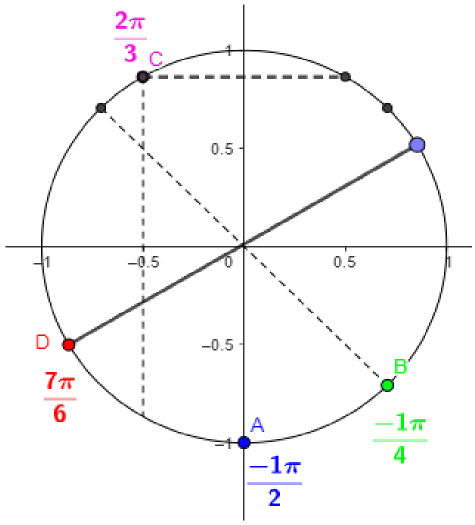
On divise 127 par 4 on trouve $\simeq 31,7$ on prend le nombre entier proche ex : 32 et $32\times4=128$

On a $\frac{127\pi}{4}=\frac{128\pi-\pi}{4}=\frac{128\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+32\pi=-\frac{\pi}{4}+16\times2\pi$

et $-\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à : $x_4=\frac{127\pi}{4}$

est : $\alpha=-\frac{\pi}{4}$



2) $A\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $B\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $C\left(\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}\right)$; $D\left(\frac{7\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice02 : $5pts(1pts\times5)$ Soit $-\pi<x<\pi$

Calculer : $A=\sin\left(\frac{6\pi-x}{6}\right)+\sin\left(\frac{12\pi+2x}{12}\right)$;

$B=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $C=\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$;

$D=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$; $E=\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Solution : On peut utiliser les résultats des tableaux suivants :

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

$$A=\sin\left(\frac{6\pi-x}{6}\right)+\sin\left(\frac{12\pi+2x}{12}\right)=\sin\left(\pi-\frac{x}{6}\right)+\sin\left(\pi+\frac{x}{6}\right)$$

$$A=\sin\left(\frac{x}{6}\right)-\sin\left(\frac{x}{6}\right)=0$$

$$B=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3\pi+2\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$B=-\sin\frac{\pi}{3}-\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=0$$

$$C=\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$$

$$C=\cos\left(\frac{12\pi+2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{24\pi-\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{8\pi+\pi}{2}\right)$$

$$C=\cos\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$C=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$C=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2\times1=-1-2=-3$$

$$D=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$D=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\times\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$D=\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$D=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$D=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$E=\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$E=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$E=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\times-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$E=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Donc : $E=\sqrt{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$

Exercice03 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$ Sachant que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

1) Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2) Calculer la valeur de : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Solution :1) On a : $1+\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}$ donc : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$

C'est-à-dire : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+2-2\sqrt{2}+1}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}=\frac{4+2\sqrt{2}}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}$

Alors : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{4+2\sqrt{2}}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Et puisque : $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ donc : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2) Calculons la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

3) Déduction des valeurs exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{8\pi-\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{8\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice04 : $2pts(1pts+1pts)$

1) Montrer que quelque soient les réels x et y on a :

$$\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y=\cos^2 x-\sin^2 y$$

2) sachant que : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

Calculer : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}$

Solution : 1) $\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y=\cos^2 x\left(1-\sin^2 y\right)-\left(1-\cos^2 x\right)\sin^2 y$

$$=\cos^2 x-\cos^2 x\sin^2 y-\sin^2 y+\sin^2 y\cos^2 x$$

$$=\cos^2 x-\sin^2 y$$

Donc : $\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y=\cos^2 x-\sin^2 y\ (1)$

2) On a : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{10}-\sin^2\frac{\pi}{8}$ d'après l'égalité (1)

Et puisque : $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Alors : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}-\frac{2-\sqrt{2}}{4}=\frac{10+2\sqrt{5}-8+4\sqrt{2}}{16}$

Donc : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{8}$

Exercice05 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\sin(2x)=\cos(3x)$ 3) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$

Solution : 1) on a : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) on a : $\sin(2x)=\cos(3x)$ équivaut à : $\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) on a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Équivaut à : $-x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k\pi$ cad $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{7\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice06 : $2\,pts(1pts+1pts)$ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}\quad(E)$

2) En déduire dans $[-\pi\,;2\pi[$ les solutions de l'équation (E)

Solution : 1) on a : $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{4}-x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $-x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $-x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ou $x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $[-\pi\,;2\pi[$ de l'équation (E)

- Encadrement de : $\frac{\pi}{12}+2k\pi$: $-\pi\le\frac{\pi}{12}+2k\pi<2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\le\frac{1}{12}+2k<2$ c'est-à-dire : $-\frac{13}{12}\le 2k<\frac{23}{12}$ cela signifie que : $-\frac{13}{24}\le k<\frac{23}{24}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ et Pour $k=0$ on trouve : $x_1=\frac{\pi}{12}$

- Encadrement de : $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$: $-\pi\le-\frac{7\pi}{12}+2k\pi<2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\le\frac{-7}{12}+2k<2$ alors : $-1+\frac{7}{12}\le 2k<2+\frac{7}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{24}\le k<\frac{31}{24}$ et $k\in\mathbb{Z}$

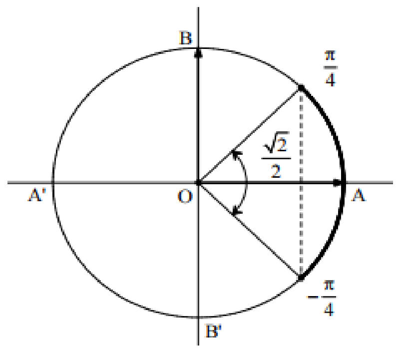
Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_2=\frac{-7\pi}{12}$ et Pour $k=1$ on trouve $x_3=\frac{17\pi}{12}$

Donc $S_{[-\pi\,;2\pi[}=\left\{\frac{-7\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{17\pi}{12}\right\}$

Exercice07 : $(1pts)$ Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$



Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in]-\pi;\pi]$ alors : $x=-\frac{\pi}{4}$ ou $x=\frac{\pi}{4}$

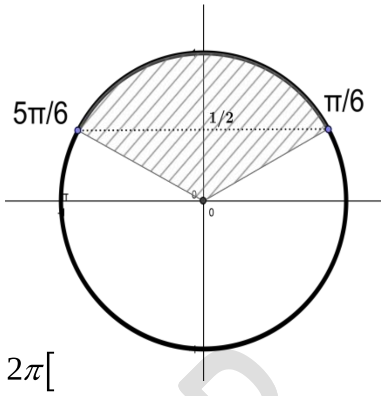
$\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x\ge\cos\frac{\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

On trouve que : $\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ Donc : $S=\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Exercice08 : $(1pts)$ Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x\ge\frac{1}{2}$

Solution : $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$



Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{1}{2}$ dans$[0\,;2\pi[$

On trouve que : $\sin x \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ Donc : $S = \left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

Exercice09 : $(1\,pts)$ Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

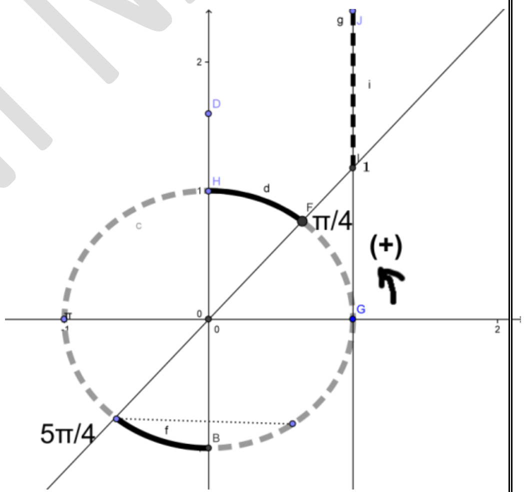
Solution : $\tan x - 1 \geq 0$ Équivaut à : $\tan x \geq 1$

- L'inéquation $\tan x - 1 \geq 0$ est définie si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{3\pi}{2}$

- Résolution de l'équation : $\tan x = 1$

$\tan x = 1$ Équivaut à : $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$



Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique
On compare $\tan x$ et 1 dans$[0;2\pi]$

On trouve que : $\tan x \geq 1$ Équivaut à : $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$

Donc : $S = \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien