Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 :H sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$: Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$$

Solution : $A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x+\cos x-\cos x+\sin x=0$

$$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$B=\sin(2\times3\pi+x)-\cos(2\pi+\pi-x)+\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)-\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{2}+x\right)$$

$$B=\sin(x)+\cos(x)-\cos(x)-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(x)-\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$

$$B=\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)-\sin(x)=0$$

$$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$$

$$C=\sin(x-\pi-6\pi)-\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+x\right)+\sin(x+1\pi+10\pi)+\cos\left(\frac{-4\pi+\pi}{2}-x\right)$$

$$C=\sin(x-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$C=\sin(-(\pi-x))-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$$

$$C=-\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$$

$$C=-\sin(x)+\sin(x)-\sin(x)+\sin(x)=0$$

Exercice02 : $2pts(1pts+1pts)$ Soit x un réel ; On pose :

$$B=8\left(\cos^6x+\sin^6x\right)-12\left(\cos^4x+\sin^4x\right)$$

1) Montrer que : si $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ alors : $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ et que : $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

2) En déduire que : $B=-4$

Solution :1) $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2$

Donc : $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$

Et on a : $(x+y)^2-2xy=x^2+2xy+y^2-2xy=x^2+y^2$

2) Déduction : $B=8\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-12\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$B=8\left(\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^3-3\cos^2 x\times\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\right)-12\left(\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\cos^2 x\sin^2 x\right)$

$B=8\left(1-3\cos^2 x\times\sin^2 x\right)-12\left(1-2\cos^2 x\sin^2 x\right)$

$B=8-24\cos^2 x\times\sin^2 x-12+24\cos^2 x\sin^2 x=-4$

Exercice03 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ Sachant que : $-\pi<x<0$ et $\tan x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\sin x$

Solution :1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Donc : $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=1+\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

Donc : $\dfrac{1}{\cos^2 x}=6-2\sqrt{6}$

C'est-à-dire : $\cos^2 x=\dfrac{1}{6-2\sqrt{6}}=\dfrac{6+2\sqrt{6}}{\left(6-2\sqrt{6}\right)\left(6+2\sqrt{6}\right)}=\dfrac{6+2\sqrt{6}}{6^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\dfrac{6+2\sqrt{6}}{12}=\dfrac{18+6\sqrt{6}}{36}$

Donc : $\cos x=\sqrt{\dfrac{18+6\sqrt{6}}{36}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\dfrac{18+6\sqrt{6}}{36}}$ c'est-à-dire : $\cos x=\dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}$ ou $\cos x=-\dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}$

Et puisque : $-\pi<x<0$ et $\tan x=\sqrt{3}-\sqrt{2}\succ 0$ alors $\cos x\prec 0$ et donc : $\cos x=-\dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}$

On a aussi : $\sin x=\cos x\times\tan x$ donc : $\sin x=-\dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

Exercice04 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$ Soit x un réel tel que $\cos x\neq 0$

Montrer les égalités suivantes :

1) $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\times\sin^2 x$ 2) $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ 3) $\sin^2 x=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

Solution :1) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x-\cos^2 x\tan^2 x$

$\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\left(1-\cos^2 x\right)$ or $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $1-\cos^2 x=\sin^2 x$

Par suite : $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\times\sin^2 x$

2) $1+\tan^2 x=1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Donc : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ par suite : $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

3) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$ donc : $\sin^2 x=\tan^2 x\times\cos^2 x=\tan^2 x\times\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $\sin^2 x=\tan^2 x\times\cos^2 x=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

Exercice05 : $2pts(1pts+1pts)$ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $\left]-\pi,\pi\right]$ de l'équation : $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : 1) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi,\pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi<\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ Équivaut à : $-\pi-\frac{\pi}{4}<2k\pi\leq\pi-\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{5\pi}{4}<2k\pi\leq\frac{3\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{4}\leq 2k\leq\frac{3}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{8}\leq k\leq\frac{3}{8}$

C'est-à-dire : $-0,6...\leq k\leq 0,37...$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1=\frac{\pi}{4}+2\times 0\times\pi=\frac{\pi}{4}$

b) Encadrement de $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi<-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$

Donc : $-1<-\frac{1}{4}+2k\leq 1$ c'est-à-dire : $-1+\frac{1}{4}<2k\leq 1+\frac{1}{4}$

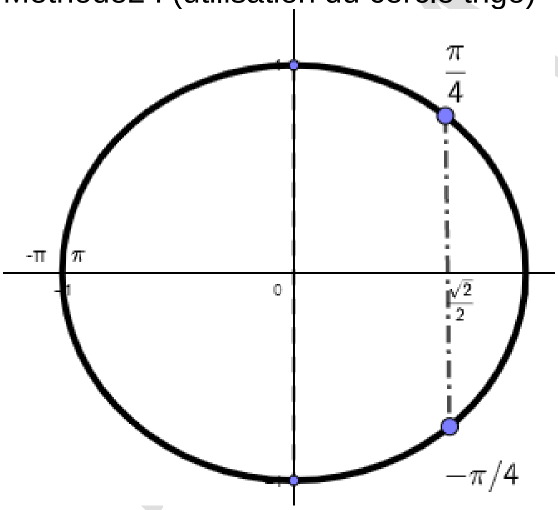
Donc : $-\frac{3}{4}<2k\leq\frac{5}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{8}<k\leq\frac{5}{8}$

Donc $-0,37...\leq k\leq 0,62...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\times 0\times\pi=-\frac{\pi}{4}$

Donc $S_{\left]-\pi,\pi\right]}=\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{\left]-\pi,\pi\right]}=\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice06 : $2\,pts(1\,pts+1\,pts)$ A l'aide d'un cercle trigonométrique seulement, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant les conditions données.

1) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec : $x\in\left]-\pi,\pi\right]$

1) $\cos x=0$ et $\sin x=-1$ avec : $x\in\left[-2\pi,3\pi\right]$

Solution : 1) $x=\frac{\pi}{4}$ 2) $x\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$

Exercice07 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation : $\cos x=-\sin\frac{\pi}{5}$

Solution : $\cos x=-\sin\frac{\pi}{5}$ Équivaut à : $\cos x=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{7\pi}{10}+2k\pi$ ou $x=-\frac{7\pi}{10}+2k\pi$

a) Encadrement de : $x=\frac{7\pi}{10}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{10}+2k\pi<\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}<\frac{7}{10}+2k<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}<2k<\frac{1}{2}-\frac{7}{10}$

Donc : $-\frac{6}{5}<2k<-\frac{1}{5}$ c'est-à-dire : $-\frac{6}{10}<k<-\frac{1}{10}$ et $k\in\mathbb{Z}$ (impossible)

b) Encadrement de : $x=-\frac{7\pi}{10}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}<-\frac{7\pi}{10}+2k\pi<\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}<-\frac{7}{10}+2k<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}+\frac{7}{10}<2k<\frac{1}{2}+\frac{7}{10}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{5}<2k\leq\frac{6}{5}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{10}<k\leq\frac{6}{10}$ et $k\in\mathbb{Z}$ (impossible)

Donc $S_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}=\varnothing$

Exercice08 : $(2\,pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+3=0\quad(E_1)$

Solution :1) $2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+3=0\quad(E_1)$

On utilise un changement de variable : on pose $t=\cos x$

L'équation (E_1) devienne : $2t^2-3\sqrt{3}t+3=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3\sqrt{3}t+3$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta=\left(-3\sqrt{3}\right)^2-4\times2\times3=3$

Les racines sont : $t_1=\frac{-\left(-3\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$ et $t_2=\frac{-\left(-3\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\cos x=\sqrt{3}$ et $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ mais l'équation n'a pas de solution car $\sqrt{3}\succ1$

Donc : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice09 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $\left[-2\pi;2\pi\right]$ l'inéquation suivante : $\cos x>\frac{1}{2}$

Solution : La démarche : on commence par résoudre l'inéquation sur une période soit par exemple dans $\left[-\pi;\pi\right]$ Puis on énonce l'ensemble des solutions en effectuant des translations d'un nombre entier de périodes.

On commence par résoudre l'inéquation sur $\left[-\pi;\pi\right]$

L'équation : $\cos x=\frac{1}{2}$ a pour solution : $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=-\frac{\pi}{3}$ dans l'intervalle : $\left[-\pi;\pi\right]$

L'inéquation a donc pour solution $S_1=\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[$ dans $\left[-\pi;\pi\right]$:

L'ensemble des solutions dans $\left[-2\pi;2\pi\right]$ est la réunion de tous les intervalles de la forme :

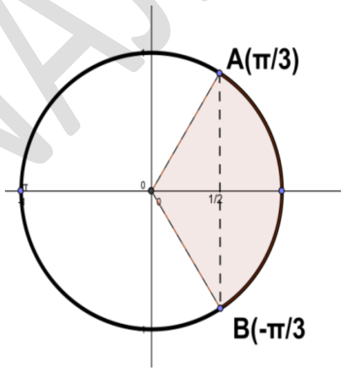
$$\left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$$

Sur l'intervalle : $\left[-\frac{\pi}{3}-2\pi;\frac{\pi}{3}+2\pi\right]$ l'ensemble des solutions est :

$$S_2=\left]-\frac{\pi}{3}-2\pi;\frac{\pi}{3}-2\pi\right[\cup\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{3}+2\pi;\frac{\pi}{3}+2\pi\right[$$

Finalement l'ensemble des solutions dans $\left[-2\pi;2\pi\right]$ est donc :

$$S=\left[-2\pi;\frac{\pi}{3}-2\pi\right[\cup\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{3}+2\pi;2\pi\right]$$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien