Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 :I sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $4pts(1pts+1pts+1pts+1pts)$

Calculer en fonction de : $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

$$A=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

$$B(x)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi-x\right)-2\sin(x-2\pi)+5\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$C(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)-4\sin(\pi-x)$$

$$D=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$$

Solution : $A=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$

$$A=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0=2+\sqrt{3}$$

$$B(x)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi-x\right)-2\sin(x-2\pi)+5\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$B(x)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-2\sin x+5\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+2\pi\right)$$

$$B(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin x+5\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$B(x)=-\sin x-2\sin x+5\cos x=-3\sin x+5\cos x$$

$$C(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)-4\sin(\pi-x)$$

$$C(x)=\cos x-3\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-4\sin x$$

$$C(x)=\cos x-3\sin x-4\sin x=\cos x-7\sin x$$

$$D=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\tan\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}=1+\sqrt{3}$$

Exercice02 : $3pts(2pts+1pts)$

Soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ On pose : $E=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^3 x$

1) Montrer que : $E=\left(2-\cos^2 x\right)^2$

2) Déterminer la valeur de E sachant que : $\tan x=\sqrt{7}$

Solution : 1) $E=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^3 x$ et on a : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

Donc : $E=4\sin x\sin x+\cos x\cos^3 x$

Donc : $E=4\sin^2 x+\cos^4 x$

Donc : $E=4\left(1-\cos^2 x\right)+\cos^4 x$ car on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ c'est à dire : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

Donc : $E=4-4\cos^2 x+\cos^4 x$

Donc : $E=\left(\cos^2 x\right)^2-2\cos^2 x\times 2+2^2$

Donc : $E=\left(\cos^2 x-2\right)^2=\left(2-\cos^2 x\right)^2$

2) Déterminons la valeur de E sachant que : $\tan x=\sqrt{7}$

On sait que : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ c'est-à-dire : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\sqrt{7}^2}=\frac{1}{1+7}=\frac{1}{8}$

Par suite : $E=\left(2-\cos^2 x\right)^2=\left(2-\frac{1}{8}\right)^2=\left(\frac{15}{8}\right)^2=\frac{225}{64}$

Exercice03 : $4pts(1,5pts+1,5pts+1pts)$ Soit x un réel tel que $\cos x\neq 0$

Montrer les égalités suivantes :

1) $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=1$ 2) $\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=2$

3) $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

Solution : 1) $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\frac{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}=\frac{\sin^2 x\times\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}$

Or on a : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ et $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

Donc : $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\frac{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}=\frac{\sin^2 x\times\cos^2 x}{\cos^2 x\times\sin^2 x}=1$

2) $\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=\frac{(\cos x-\sin x)\left(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x\right)}{\cos x-\sin x}+\frac{(\cos x+\sin x)\left(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x\right)}{\cos x+\sin x}$

Car : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ et $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Donc : $\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x$

$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\times 1=2$$

3) Montrons que : $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

$$(1+\sin x+\cos x)^2=1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x+2\cos x+2\cos x\sin x$$
$$=1+1+2\sin x+2\cos x+2\cos x\sin x$$
$$=2(1+\sin x+\cos x+\cos x\sin x)$$
$$=2\left((1+\sin x)+\cos x(1+\sin x)\right)$$
$$=2(1+\sin x)(1+\cos x)$$

Exercice04 : $4\,pts(1\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2\sin x-3=0$ b) $\sin(2x)=\cos(3x)$ c) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$

Solution : a) $2\sin x-3=0$ Équivaut à : $2\sin x=3$

Équivaut à : $\sin x=\frac{3}{2}\notin[-1;1]$

Alors l'équation : $2\sin x-3=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

b) On a : $\sin(2x)=\cos(3x)$ équivaut à : $\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) On a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

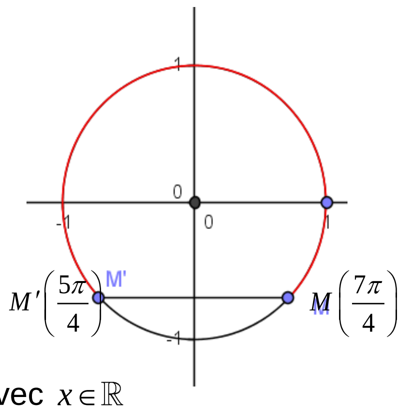
Équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ Équivaut à : $\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Équivaut à : $-x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k\pi$ cad : $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{7\pi}{12}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice05 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$



L'arc MM' en rouge correspond à tous les points $M(x)$ tel que :

x Vérifie $\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc : $\sin x\geq\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x\geq\sin\frac{\pi}{6}$

Donc : $S=\left[0;\frac{5\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Exercice06 : $3,5\,pts(1,5\,pts+2\,pts)$ On pose : $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ avec $x\in\mathbb{R}$

1) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E) : $f(x)=0$

2) En déduire le signe de : $f(x)$ dans $]-\pi;\pi]$

Solution :1) $f(x)=0$ signifie que : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

Équivaut à : $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$

Dans l'intervalle : $\left]-\pi\,;\pi\right]$ les solutions sont : $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{11\pi}{12}$

Par conséquent : $S_{]-\pi\,;\pi]}=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right\}$

2) Déduction du signe de : $f(x)$ dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$

- Sur l'inter valle : $\left]-\pi\,;-\frac{11\pi}{12}\right[$: on a : $-\pi<x<-\frac{11\pi}{12}$ donc : $-2\pi<2x<-\frac{11\pi}{6}$

Donc : $-2\pi+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{7\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{3\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

- Sur l'inter valle : $\left]-\frac{11\pi}{12};-\frac{5\pi}{12}\right[$: on a : $-\frac{11\pi}{12}<x<-\frac{5\pi}{12}$ donc : $-\frac{11\pi}{6}<2x<-\frac{5\pi}{6}$

Donc : $-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$

- Sur l'inter valle : $\left]-\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right[$: on a : $-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}$ donc : $-\frac{5\pi}{6}<2x<\frac{\pi}{6}$

Donc : $-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

- Sur l'inter valle : $\left]\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right[$: on a : $\frac{\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{12}$ donc : $\frac{\pi}{6}<2x<\frac{7\pi}{6}$

Donc : $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$

- Sur l'inter valle : $\left]\frac{7\pi}{12};\pi\right[$: on a : $\frac{7\pi}{12}<x<\pi$ donc : $\frac{7\pi}{6}<2x<2\pi$

Donc : $\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{3}$ et alors : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

On peut alors résumer ces résultats dans un tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{11\pi}{12}$		$-\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		π
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien